

# Modélisation semi-analytique des pertes cuivres d'une inductance planar

Idriss NACHETE <sup>1,2</sup>, Xavier MARGUERON <sup>1</sup>, Frédéric GILLON <sup>1</sup>, Guillaume LEFEVRE <sup>2</sup>

<sup>1</sup> Univ. Lille, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, Junia, ULR 2697 - L2EP, F-59000 Lille, France

<sup>2</sup> Mitsubishi Electric R&D Center Europe (MERCE), 1 Allée de Beaulieu, 35708 Rennes, France

**RESUME** – Cet article présente une approche semi-analytique pour l'estimation des pertes cuivre dans une inductance planar constituée de matériaux magnétiques à forte et faible perméabilité. En se basant sur un modèle 2D de champ magnétique dans la fenêtre de bobinage, des coefficients de paramétrage sont déterminés à l'aide d'un nombre minimal de simulation éléments-finis. Ce modèle semi-analytique est validé pour plusieurs cas tests avec diverses configurations d'enroulements. Ce type de modèle montre clairement son intérêt dans des approches de dimensionnement optimal pour lesquelles précision et temps de calcul sont des éléments clés.

**Mots-clés**—Inductance planar, pertes cuivre HF, entrefer distribué, modélisation.

## 1. INTRODUCTION

Les inductances planar, constituées de noyaux planar E et plate (PLT), ainsi que d'enroulements en circuit imprimés (PCB), peuvent être une solution pertinente pour des convertisseurs DC/DC à forte densité de puissance [1]. Un point bloquant est lié à la présence de l'entrefer qui génère des pertes cuivre supplémentaires dans les enroulements à proximité [2]. Il reste possible de s'affranchir de ce défaut en remplaçant l'entrefer par une partie du noyau magnétique en matériau à faible perméabilité. On parle alors d'inductance à entrefer distribué [3] ou encore d'inductance planar HLP (High and Low Permeability) [4].

Un des points importants liés au dimensionnement de ces inductances concerne l'estimation précise des pertes dans le composant et notamment les pertes cuivre. L'aspect 2D du champ magnétique dans la fenêtre de l'inductance rend complexe l'approche analytique. Un calcul numérique par simulation éléments-finis (FEM) sur une large plage de fréquence est possible mais il reste incompatible avec une phase d'optimisation d'une inductance HLP. Un modèle intermédiaire, de type semi-analytique est une solution intéressante en termes de ratio précision/temps de calcul et particulièrement adaptée pour une approche de dimensionnement par optimisation [5].

Après avoir rappelé le principe et l'intérêt des inductances HLP, le modèle semi-analytique de pertes cuivre développé dans ce travail sera présenté, en se basant sur une approche de modélisation 2D du champ dans la fenêtre de l'inductance planar appelé M2DM (Matrix 2D Model), complété par des simulations FEM. Le choix d'un nombre limité de fréquences sera discuté avant de comparer les résultats de cette approche semi-analytique à des simulations éléments-finis 2D.

## 2. INDUCTANCES PLANAR HLP

Les inductances HLP sont des composants planar basés sur l'association d'un noyau planar E et d'un PLT en ferrite (High permeability - HP) ou en matériau magnétique à faible perméabilité (LP), de type poudre de fer. Pour pallier la problématique des pertes cuivre supplémentaires engendrées par l'entrefer, on obtient alors trois associations possibles : HPLP (HP pour le E et LP pour le PLT), LPHP et LPLP. Un exemple d'inductance planar LPHP est présenté sur la Fig.1.

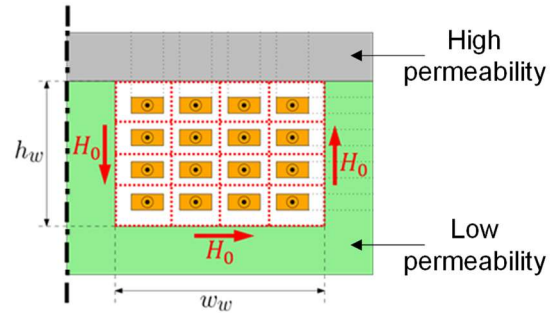


Fig. 1. Exemple d'inductance planar HLP : E en LP et PLT en HP (LPHP)

Ce type d'association permet un gain notable sur les pertes cuivre en comparaison d'une inductance planar à entrefer [4, 6], comme illustré sur la Fig.2. En comparaison du cas ayant recours à un entrefer (HPHP), la résistance  $R_{AC}$  diminue de 20% à 40% pour la configuration HPLP, de 70% pour la configuration LPHP et jusqu'à 85% pour la configuration LPLP. Ces résultats doivent être contrebalancés en incluant, au global, l'impact des pertes dans les matériaux magnétiques soumis à une composante DC du champ [7].

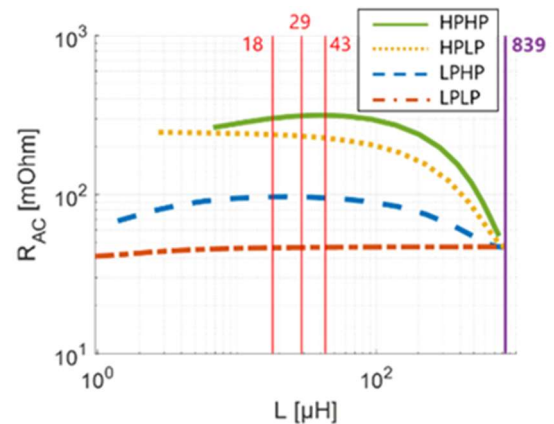


Fig. 2. Résistance de l'enroulement à 250 kHz, en fonction de la valeur d'inductance [6]

### 3. MODELISATION SEMI-ANALYTIQUE DES PERTES CUIVRE

La modélisation analytique des pertes cuivre dans les inductances reste complexe car elle requiert de prendre en compte l'effet d'épanouissement des champs dans la fenêtre de bobinage. Les approches 1D type Dowell [8] sont insuffisantes et les approches 2D sont souvent non généralisables [1] ou basées sur des hypothèses fortes [2, 4]. De manière générale, le cas des conducteurs rectangulaires, présents, par exemple, sur des enroulements PCB est très peu traité dans la littérature [9].

Après avoir présenté rapidement la problématique associée au calcul des pertes cuivre en 2D, nous introduirons l'approche semi-analytique développée dans le cas d'inductances planar HLP. Cette approche consiste à utiliser un modèle matriciel (M2DM) permettant l'estimation du champ dans la fenêtre en magnétostatique et de le compléter par des coefficients de paramétrage déterminés par un nombre de simulations FEM minimal, à des fréquences judicieusement choisies.

#### 3.1. Problématique du calcul des pertes cuivre en 2D et approche simplifiée

La formulation des pertes cuivre dans les enroulements dépend des conditions aux limites (CL) du champ  $H$  au niveau des conducteurs. La Fig.3 présente un exemple de l'évolution du champ  $H_t$  le long d'un conducteur (config. LPHP) en fonction de la fréquence. La valeur moyenne de  $H_t$  reste relativement constante mais sa valeur efficace (RMS) augmente avec la fréquence. Cette valeur RMS induit un champ localisé plus intense auquel sont associés des courants induits, source de pertes cuivre AC additionnelles.

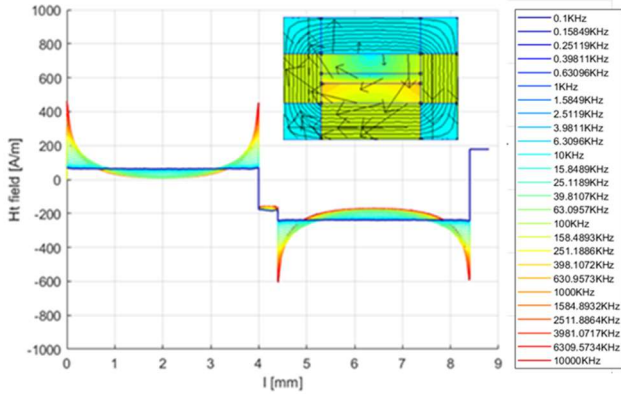


Fig. 3. Circulation de  $H$  autour du conducteur

Dans [4], un modèle simplifié S2DM (Simplified 2D Model) avait été développé pour le cas de conducteurs rectangulaires (Fig.4), en se basant sur une approche de double porosité, sur les 2 dimensions de la fenêtre. Ceci permettait de revenir à une formulation plus simple en s'affranchissant de l'impact fréquentiel.

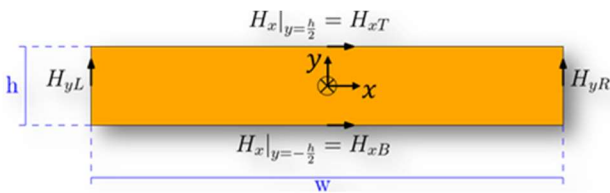


Fig. 4. Circulation de  $H$  autour du conducteur [4]

L'approche S2DM permet d'estimer les valeurs du champ sur les contours des conducteurs pour estimer les différentes composantes des pertes. Les pertes totales (1) sont fonction de 5

termes liés aux effets de peau et de proximité dans les 2 dimensions, plus un terme croisé (2).

$$P_{loss} = P_{Xskin} + P_{Xprox} + P_{Yskin} + P_{Yprox} + P_{XY} \quad (1)$$

$$\begin{cases} P_{Xskin} = R_{DC} \times I_{RMSXskin}^2 \times F_{RXskin} \\ P_{Xprox} = R_{DC} \times I_{RMSXprox}^2 \times F_{RXprox} \\ P_{Yskin} = R_{DC} \times I_{RMSYskin}^2 \times F_{RYskin} \\ P_{Yprox} = R_{DC} \times I_{RMSYprox}^2 \times F_{RYprox} \\ P_{XY} = 2R_{DC} \times I_{RMSXskin} \times I_{RMSYskin} \end{cases} \quad (2)$$

avec  $R_{DC}$  la résistance DC du conducteur et les courants RMS et les facteurs résistifs donnés respectivement par (3) et (4).

$$\begin{cases} I_{RMSXskin} = \frac{1}{\sqrt{2}} w (H_{xB} - H_{xT}) = \sqrt{2} w \times H_{Xskin} \\ I_{RMSXprox} = \frac{1}{\sqrt{2}} w (H_{xB} + H_{xT}) = \sqrt{2} w \times H_{Xprox} \\ I_{RMSYskin} = \frac{1}{\sqrt{2}} h (H_{yR} - H_{yL}) = \sqrt{2} h \times H_{Yskin} \\ I_{RMSYprox} = \frac{1}{\sqrt{2}} h (H_{yR} + H_{yL}) = \sqrt{2} h \times H_{Yprox} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} F_{RXskin} = \frac{h}{2\delta} \frac{\sinh(\frac{h}{\delta}) + \sin(\frac{h}{\delta})}{\cosh(\frac{h}{\delta}) - \cos(\frac{h}{\delta})} \\ F_{RXprox} = \frac{h}{2\delta} \frac{\sinh(\frac{h}{\delta}) - \sin(\frac{h}{\delta})}{\cosh(\frac{h}{\delta}) + \cos(\frac{h}{\delta})} \\ F_{RYskin} = \frac{w}{2\delta} \frac{\sinh(\frac{w}{\delta}) + \sin(\frac{w}{\delta})}{\cosh(\frac{w}{\delta}) - \cos(\frac{w}{\delta})} \\ F_{RYprox} = \frac{w}{2\delta} \frac{\sinh(\frac{w}{\delta}) - \sin(\frac{w}{\delta})}{\cosh(\frac{w}{\delta}) + \cos(\frac{w}{\delta})} \end{cases} \quad (4)$$

Malgré un temps de calcul rapide et une précision raisonnable, S2DM a montré ses limites car le calcul est indépendant du positionnement des conducteurs dans la fenêtre.

#### 3.2. M2DM

Pour tenir compte des dimensions des conducteurs du PCB et de leur positionnement dans la fenêtre de l'inductance, une approche type représentation matricielle, M2DM, est développée. M2DM permet d'obtenir une meilleure représentation du champ magnétique dans la fenêtre que S2DM pour recalculer les différentes composantes des pertes (1). Cependant, M2DM ne tient pas compte de la variation fréquentielle du champ aux CL des conducteurs. Ce dernier point sera compensé, dans la suite, par l'approche semi-analytique.

Les CL des conducteurs du modèle M2DM nécessitent de résoudre une matrice de dimension  $(2N_L + 1) \times (2N_T + 1)$ , avec  $N_L$  le nombre de couches et  $N_T$ , le nombre de conducteurs par couches (Fig.4).

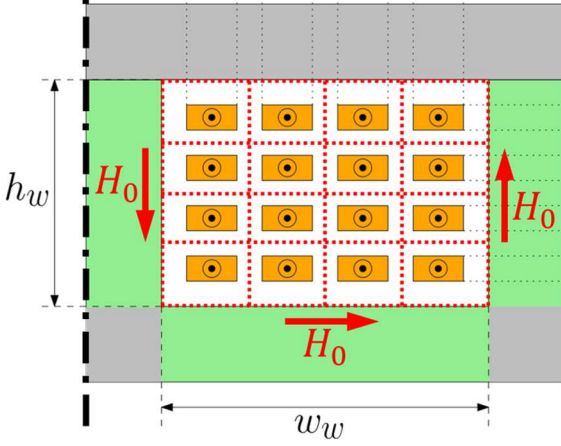


Fig. 4. Principe de la représentation matricielle dans la fenêtre d'une inductance LPHP pour le calcul des CL

Pour résoudre le système, il est nécessaire d'obtenir  $N_{eq}$  équations linéaires (5), le champ tangentiel  $H_t$  étant considéré comme constant entre 2 nœuds dans la fenêtre.

$$N_{eq} = \underbrace{n_{Lin} \times n_{Col}}_{N_{element}} - 1 + \underbrace{(n_{Lin} - 1)(n_{Col} - 1)}_{N_{nodes}} \quad (5)$$

avec  $n_{Lin}$  le nombre de lignes de la matrice et  $n_{Col}$  le nombre de colonnes.

Pour illustrer les équations nécessaires, on peut s'intéresser à un unique conducteur (Fig.5). En partant de cette figure, il est possible d'écrire le théorème d'Ampère, par exemple, sur les contours  $C_{11}$  (6),  $C_{12}$  (7) et  $C_{13}$  (8).

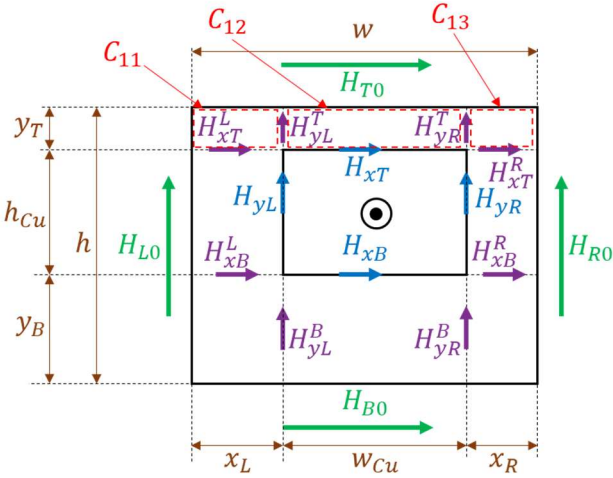


Fig. 5. Principe de la représentation matricielle dans la fenêtre d'une inductance LPHP pour le calcul des CL

$$H_{T0}x_L - H_{yL}^T y_T - H_{xT}^L x_L + H_{L0}y_T = 0 \quad (6)$$

$$H_{T0}w_{Cu} - H_{yR}^T y_T - H_{xT}w_{Cu} + H_{yL}^T y_T = 0 \quad (7)$$

$$H_{T0}x_R - H_{R0}y_T - H_{xT}^R x_R + H_{yR}^T y_T = 0 \quad (8)$$

Il faut donc écrire  $N_{el}$  équations similaires, en appliquant le théorème d'Ampère et  $N_{nod}$  équations, en appliquant le

théorème de Gauss, pour résoudre la matrice de rang  $N_{eq}$  et obtenir la valeur des champs sur le contour de chaque conducteur.

La Fig.6 présente une comparaison du facteur résistif,  $F_R = R_{AC}/R_{DC}$  obtenu par simulation FEM, par la méthode de Dowell [8], par S2DM [4] et avec M2DM. Ce dernier permet une sous-estimation des pertes de l'ordre de 20% quand le modèle de Dowell ou le modèle simplifié S2DM surestiment, quant à eux, l'estimation de, respectivement, 65 % et 40%. M2DM semble donc intéressant en termes de précision mais il peut encore être amélioré car il ne tient pas compte de la variation fréquentielle des champs sur les CL des conducteurs.

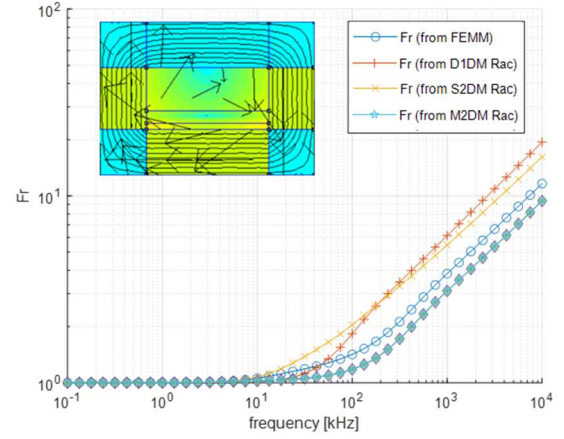


Fig. 6. Comparaison de modèles pour une inductance LPHP à un seul conducteur positionné en bas de la fenêtre.

### 3.3. Approche semi-analytique

Pour compenser la non-prise en compte de cette variation fréquentielle, une approche semi-analytique (SA) est développée. Cette approche est basée sur l'utilisation du modèle matriciel M2DM, enrichi par des coefficients de paramétrage. L'enjeu est de déterminer ces coefficients par un nombre minimal de simulations FEM, à des fréquences judicieusement choisies.

Dans le modèle SA, les différents termes de (1) sont exprimés avec 4 coefficients de réglage permettant d'ajuster l'influence des termes en fonction de la fréquence (9) :  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$ . Pour déterminer les valeurs de ces coefficients, trois simulations FEM sont alors nécessaires, la 4<sup>ème</sup> équation étant liée à la résistance DC des enroulements, facilement calculable analytiquement. Les fréquences des simulations sont choisies en fonction de  $f_\delta$ , fréquence pour laquelle l'épaisseur de peau est comparable à une des dimensions des conducteurs (largeur  $w$  et hauteur  $h$ ). Les fréquences sont réparties de manière logarithmiques via un facteur  $K$  (11), réglable en fonction du nombre et des dimensions des conducteurs.

Une version normalisée de l'erreur quadratique moyenne est utilisée pour minimiser la somme des carrés des résidus normalisés entre les valeurs calculées analytiquement et celles obtenus par FEM (12). Avec cette méthode, tous les conducteurs ont les mêmes coefficients assignés, ce qui impose un impact uniforme sur tous les conducteurs.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{Xprox}(A_1) = R_{DC} \times \underbrace{(\sqrt{2}H_{Xprox} \times w \times A_1)^2}_{I_{RMSXprox}} \times \underbrace{\frac{h}{2\delta} ft_{prox}\left(\frac{h}{\delta}\right)}_{FR_{Xprox}} \\ P_{Xskin}(A_2) = R_{DC} \times \underbrace{(\sqrt{2}H_{Xskin} \times w \times A_2)^2}_{I_{RMSXskin}} \times \underbrace{\frac{h}{2\delta} ft_{skin}\left(\frac{h}{\delta}\right)}_{FR_{Xskin}} \\ P_{Yprox}(B_1) = R_{DC} \times \underbrace{(\sqrt{2}H_{Yprox} \times h \times B_1)^2}_{I_{RMSYprox}} \times \underbrace{\frac{w}{2\delta} ft_{prox}\left(\frac{w}{\delta}\right)}_{FR_{Yprox}} \\ P_{Yskin}(B_2) = R_{DC} \times \underbrace{(\sqrt{2}H_{Yskin} \times h \times B_2)^2}_{I_{RMSYskin}} \times \underbrace{\frac{w}{2\delta} ft_{skin}\left(\frac{w}{\delta}\right)}_{FR_{Yskin}} \end{array} \right. \quad (9)$$

avec  $ft_{prox}$  et  $ft_{skin}$  donnés par (10)

$$\left\{ \begin{array}{l} ft_{prox}(x) = \frac{\sinh(x) - \sin(x)}{\cosh(x) + \cos(x)} \\ ft_{skin}(x) = \frac{\sinh(x) + \sin(x)}{\cosh(x) - \cos(x)} \end{array} \right. \quad (10)$$

$$f_i \in \left\{ f_\delta(w) \cdot \sqrt{K}, \frac{f_\delta(h)}{\sqrt{K}}, f_\delta(h) \cdot \sqrt{K} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} f_{obj}(X) &= RMSPE(X) \\ &= 100 \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(Fr_{FEM}(f_i) - Fr_{calc}(f_i, X))^2}{Fr_{FEM}^2(f_i)}} \end{aligned} \quad (12)$$

avec  $Fr_{calc}$  donné par (13)

$$Fr_{calc}(f, X) = \frac{\sum_{n_L=1}^{N_L} \sum_{n_T=1}^{N_T} P_{loss}(n_L, n_T, f, X)}{R_{DC} \times I_{RMS}^2} \quad (13)$$

#### 4. VALIDATION NUMERIQUE

L'approche SA est testée sur 4 configurations d'inductance planar LPHP, basée sur l'association d'un noyau E43/10/28 en matériau LP et d'un PLT43/28/4.1 en ferrite. En partant de 2 stackups, 4 versions de PCB sont testées :

- 8 couches / 1 conducteur par couche (Fig.7a) – 8/I
- 4 couches / 1 conducteur par couche (Fig.7b) – 4/I
- 8 couches / 11 conducteurs par couche (Fig.7c) – 8/11
- 4 couches / 11 conducteurs par couche (Fig.7d) – 4/11

Les comparaisons sont réalisées sur la gamme de fréquence [1Hz; 10MHz].

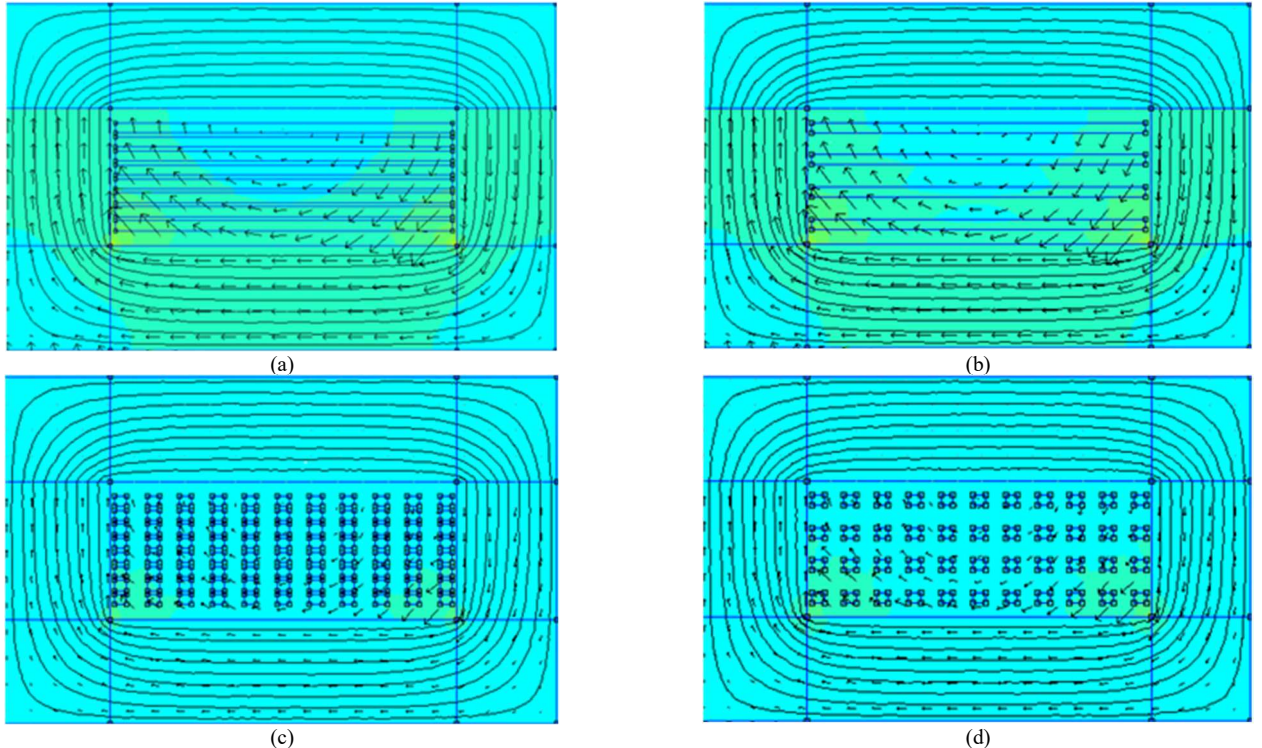


Fig. 7. Configurations d'inductance LPHP : (a) 8 couches / 1 conducteur par couche – (8/I), (b) 4 couches / 1 conducteur par couche – (4-I), (c) 8 couches / 11 conducteurs par couche (8/11), (d) 4 couches / 11 conducteurs par couche (4/11)

La Fig.8 présente les comparaisons de facteurs résistifs entre le modèle SA et des simulations FEM (64 simulations sur la plage de fréquence) : cas 8/1 (Fig.8a), cas 4/1 (Fig.8b), cas 8/11 (Fig.8c) et cas 4/11 (Fig.8d). Le Tableau 1 liste, pour ces mêmes cas de figure, les coefficients obtenus pour le modèle semi-analytique, ainsi que les valeurs de  $K$  pour la répartition des fréquences de calcul. Pour gagner en précision, ce paramètre  $K$  doit être ajusté en fonction du ratio largeur/hauteur des conducteurs.

On peut voir qu'avec seulement ces 3 simulations (data sur les figures + l'estimation de  $R_{DC}$  en basse fréquence), le modèle paramétré se rapproche de la courbe FEM en comparaison avec la courbe obtenue seulement avec le modèle M2DM sans les coefficients (init curve). L'approche SA permet, ainsi, de minimiser les écarts liés aux hypothèses et approximations sur les CL du champ autour des conducteurs. Le modèle SA permet donc une meilleure représentation des effets de peau et de proximité dans les conducteurs et donc une estimation plus précise des pertes cuivre dans les enroulements de l'inductance, tout en ayant un temps de calcul raisonnable, compatible avec un process d'optimisation.

Tableau 1. Coefficients pour les 4 configurations de PCB.

| Version PCB | A <sub>1</sub> | A <sub>2</sub> | B <sub>1</sub> | B <sub>2</sub> | K   |
|-------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| 8/1         | 2.8494         | 1.9883         | 0.00054988     | 3.952          | 10  |
| 4/1         | 27.2076        | -41.828        | 1.009          | 69.4689        | 20  |
| 8/11        | 36.9696        | 130.5057       | -0.0010992     | -148.64        | 100 |
| 4/11        | 29.5696        | -62.9256       | 0.00095467     | 40.3399        | 100 |

## 5. CONCLUSIONS

Cet article présente un modèle semi-analytique permettant l'estimation des pertes cuivre dans une inductance planar HLP. Un modèle analytique matriciel 2D est paramétré par des coefficients qui sont déterminés par simulations FEM. Les résultats montrent qu'avec seulement 3 simulations, le facteur résistif des enroulements peut être obtenu, de manière très précise, sur une large bande de fréquence. Ce type de modèle est particulièrement intéressant pour des approches de dimensionnement optimal.

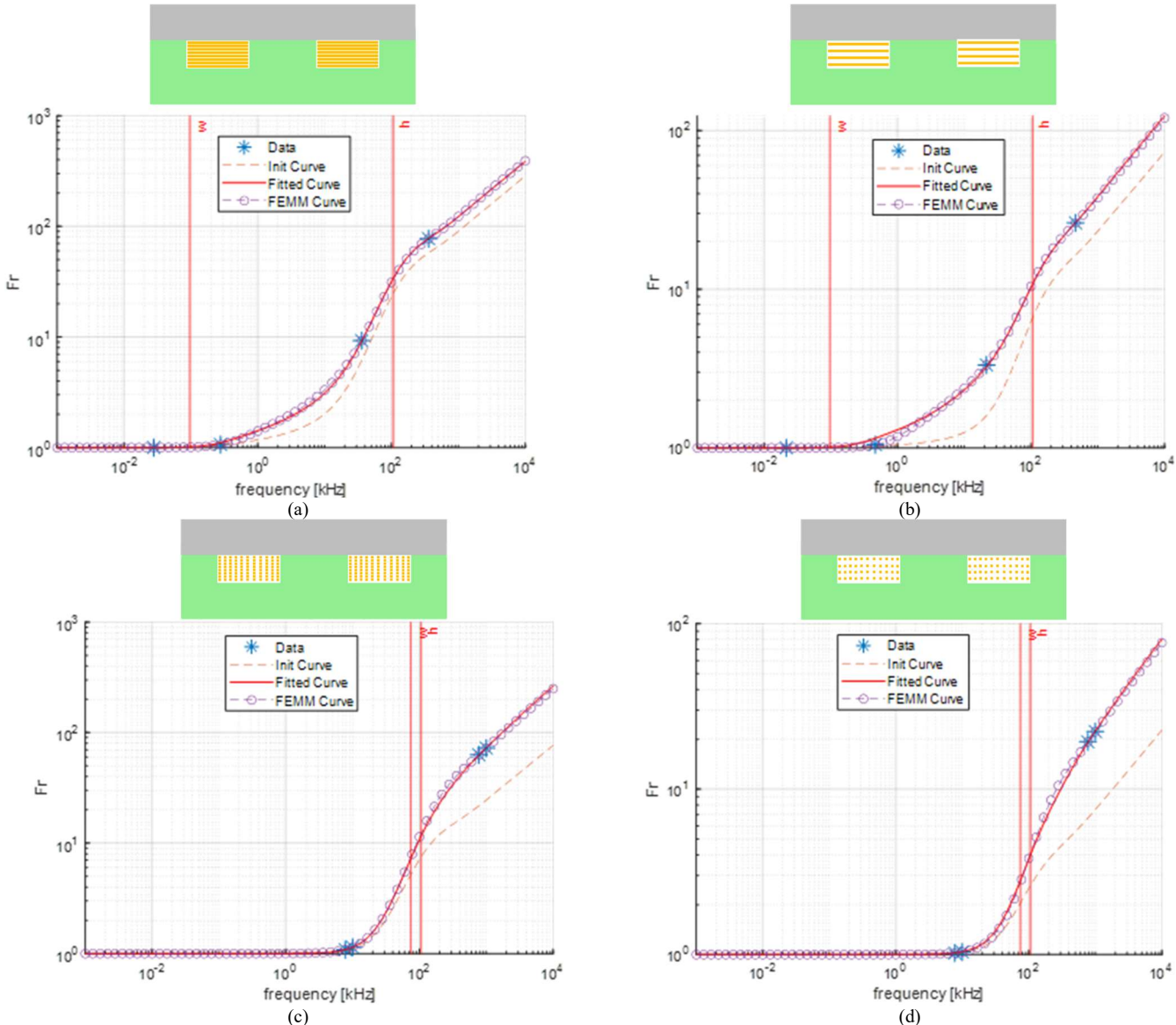


Fig. 8. Comparaison des facteurs résistifs (nombre de couches/nombre de conducteurs) – config. LPHP : (a) 8/1, (b) 4/1, (c) 8/11 et (d) 4/11

## 6. REFERENCES

- [1] Y. Gao et al., "Modeling and Design of High-Power, High-Current-Ripple Planar Inductors," *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 37, no. 5, pp. 5816–5832, May 2022.
- [2] P. Ren, W. Chen, X. Huang, Y. Chen, Y. Wang, and X. Yang, "AC Copper Loss Reduction in Planar Inductors With Magnetic Building Blocks-Based Gapless Parallel Symmetrical Magnetoresistance Structure," *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, vol. 11, no. 4, pp. 4295–4312, Aug. 2023.
- [3] C. R. Sullivan, "Prospects for advances in power magnetics," in *CIPS 2016; 9th International Conference on Integrated Power Electronics Systems*, Mar. 2016, pp. 1–9.
- [4] I. Nachete, X. Margueron, F. Gillon and G. Lefevre, "2D Copper Loss Analytical Model for Planar Inductor Combining High and Low Permeability Materials," *PCIM Europe 2024; International Exhibition and Conference for Power Electronics, Intelligent Motion, Renewable Energy and Energy Management*, Nürnberg, Germany, 2024, pp. 2403-2410
- [5] I. Nachete, X. Margueron, F. Gillon, G. Lefevre, "Design by optimization of DC-DC High-Current Planar Inductor Combining High and Low Permeability Magnetic Materials", 2024 IEEE Design Methodologies Conference (DMC), Grenoble, France, 2024, pp. 1-8
- [6] I. Nachete, R. Bakri, X. Margueron, F. Gillon, G. Lefevre, "Analyse comparative des pertes cuivre dans les inductances planar : entrefer vs matériaux à faible  $\mu$ ", *Symposium de Génie Electrique, SGE23*, Lille, 5-7 juillet 2023
- [7] J. Muhlethaler, J. Biela, J. W. Kolar and A. Ecklebe, "Core Losses Under the DC Bias Condition Based on Steinmetz Parameters," in *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 27, no. 2, pp. 953-963, Feb. 2012
- [8] P. L. Dowell, "Effects of eddy currents in transformer windings," *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 113, no. 8, pp. 1387–1394, Aug. 1966.
- [9] T. Ewald and J. Biela, "Eddy currents in rectangular conductors: Analytical 2D loss model in the context of magnetic component design," 2023 25th European Conference on Power Electronics and Applications (EPE'23 ECCE Europe), Aalborg, Denmark, 2023, pp. 1-9