

Calcul analytique de l'induction d'armature d'une machine électrique à aimants en surface

Ali SALLOUKH ^{1,2}, Abdelmounaim TOUNZI ¹, Ngac Ky NGUYEN ¹, Dany PRIETO ², Mike MCCLELLAND ²

¹ Univ. Lille, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, Junia, ULR 2697-L2EP, F-59000 Lille, France

² NIDEC - LEROY SOMER, Boulevard Marcellin Leroy CS10015 / 16915 Angoulême Cedex 9 / France

14 mai 2025

RESUME - Cette communication présente une méthode analytique simplifiée pour le calcul de l'induction magnétique radiale et orthoradiale, générées par le courant statorique dans le cas de machines synchrones à aimants en surface. Les résultats issus du modèle sont comparés à ceux obtenus par éléments finis avec de bonnes concordances. Enfin, sa rapidité est comparée à celle d'un modèle analytique de référence.

Mots-clés — machine synchrone à aimants en surface, modèle analytique, induction magnétique orthoradiale, induction magnétique radiale

1. INTRODUCTION

Le développement d'un modèle analytique de machines électriques, sous diverses hypothèses simplificatrices, peut permettre de calculer rapidement et avec une certaine précision diverses grandeurs dont le champ magnétique dans l'entrefer. Dans le cas de ce dernier, plusieurs méthodes de modélisation analytique sont citées dans la littérature. Ainsi, une première approche est basée sur le produit de la fonction de FMM par la perméance d'entrefer. Cette méthode, rapide, est adaptée aux faibles entrefers magnétiques [1], [2] mais ne permet de calculer que l'induction magnétique radiale au niveau de l'entrefer.

La méthode des sous-domaines, grâce à la séparation des variables, donne des résultats de bonne précision. Elle s'emploie directement pour les machines à armatures lisses [3] mais des simplifications peuvent être envisagées pour modéliser des stators à encoches [4]. En complexifiant le modèle analytique, il est possible de modéliser des encoches ou des formes d'aimants non conventionnelles [5].

D'autres méthodes de résolution, telles que les réseaux de réductances [6] peuvent aussi être utilisées avec des niveaux de précision et de complexité très divers.

Dans la recherche constante de modèles simples et rapides avec une précision suffisante pour un prédimensionnement, voire une première optimisation, cette communication propose un modèle analytique, permettant de déterminer l'induction magnétique créée par un courant statorique, dans l'entrefer d'une machine synchrone à aimants en surface.

Après l'introduction du contexte et objectifs du travail, les hypothèses et les équations du modèle seront présentées de manière graduelle. La précision du modèle sera également quantifiée par rapport à des résultats obtenus par éléments finis dans des conditions plus réalistes. Enfin, la performance de ce

modèle en termes de temps de calcul, sera comparée à celle d'un modèle analytique de référence.

Ces travaux sont réalisés dans le cadre du projet européen « Fuel cell propulsion system for Aircraft Megawatt Engines (FAME) ». FAME traite du développement d'un démonstrateur au sol de 1 MW, dans l'optique de la réalisation d'une chaîne de propulsion électrique compacte, légère et à haut rendement, alimentée en LH2 pour des avions court courrier.

2. CONTEXTE DE LA MODELISATION

Le modèle analytique développé s'inscrit dans le contexte de la conception et le prédimensionnement de machines synchrones à aimants en surface, qu'elles soient à aimants radiaux ou avec une disposition en Halbach (Fig. 1).

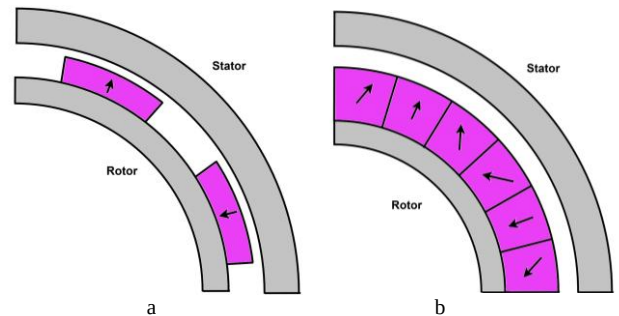


Fig. 1. a : Machines à aimants radiaux et b : en Halbach

Ces machines ont la particularité de présenter des entrefers magnétiques relativement larges, comprenant l'entrefer mécanique, des aimants et une frette pour les maintenir. Pour les machines Halbach, il est même possible de supprimer la culasse fer au rotor [7]. Dans cette configuration, l'effet de la non linéarité des matériaux magnétiques est peu impactant ; il est possible de superposer les contributions des courants d'induit et des aimants pour déterminer l'induction globale dans l'entrefer.

L'objectif du modèle à développer est de pouvoir accéder à la valeur de l'induction dans l'entrefer avec des temps de calcul réduits, mais également de pouvoir estimer les composantes radiale et orthoradiale de manière précise. Cela permettra de :

- Déterminer les *ondulations de couple* et de *force* ;
- Déterminer les forces électromagnétiques qui s'exercent sur le stator induisant des vibrations et bruit ;
- Déterminer de potentiels courants induits dans les aimants, dus aux composantes radiale et orthoradiale.

3. DEVELOPPEMENT DU MODELE

Le développement du modèle est effectué sous les hypothèses suivantes :

1. Les saillances dues à l'encoche ne sont pas prises en compte ;
2. Le fer est supposé de perméabilité finie, mais très supérieure à celle de l'air ;
3. La perméabilité relative des aimants est supposée de 1.

Dans un premier temps, la modélisation se focalise plus spécifiquement sur le cas de structures sans fer rotorique, ce qui peut être représenté par des machines à aimants Halbach sans culasse rotor. Sous les hypothèses simplificatrices énoncées ci-dessus, les encoches sont initialement supposées infiniment minces. La prise en compte de leurs largeurs réelles sera introduite dans une seconde étape. De même, une modification des équations sera proposée pour prendre en compte la présence d'une culasse fer au rotor ; le modèle sera alors étendu à l'ensemble des machines synchrones à aimants en surface.

3.1. Induction due au courant dans une encoche statorique

Dans un but de développement graduel, il faut commencer par calculer l'induction magnétique radiale b_r et orthoradiale b_θ , dues à un courant traversant des conducteurs localisés dans une encoche. La contribution de la totalité du bobinage s'obtient en appliquant le théorème de superposition.

Soit donc une encoche, contenant N conducteurs où circule un courant i . La force magnétomotrice (f.m.m.) totale $N.i$ peut être considérée comme étant localisée en un point noté I . Celui-ci est situé à l'intersection entre l'axe de symétrie de l'encoche et l'interface fer-air (Fig. 2). Le centre de la machine est noté O : $OI = R_s$ (rayon intérieur du stator).

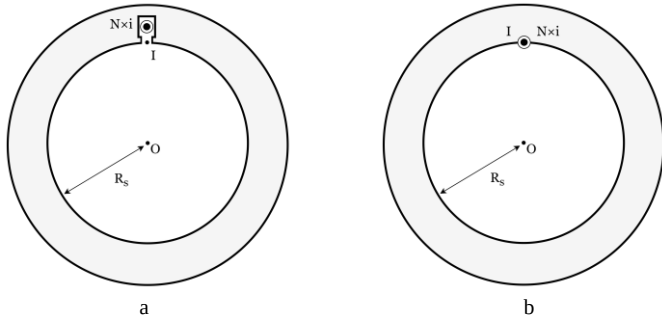


Fig. 2. Armature à une encoche : a : Représentation entière – b : Représentation ponctuelle utilisée pour le modèle

Le fer canalisant les lignes de champ magnétique produit par la f.m.m $N.i$, le problème peut se décrire par un circuit magnétique simple illustré à la Fig. 3.

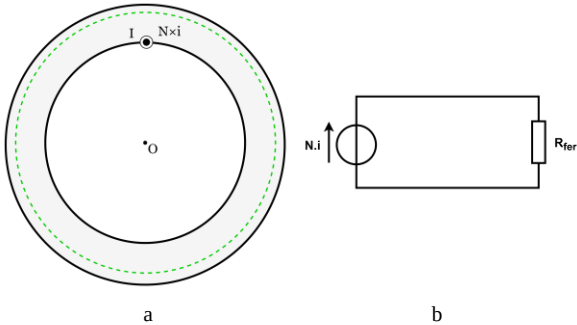


Fig. 3. a : Champ dans le fer – b : Circuit magnétique

Si une portion quelconque de la culasse ferromagnétique, d'angle ν (Fig. 4a) est considérée, la réluctance du circuit

magnétique statorique peut être décomposée en deux réluctances en série :

$$R_{fer} = R_{fer}^{I_3 I_4} + R_{fer}^{I_4 I_3} = \frac{\nu}{2\pi} R_{fer} + \frac{(2\pi - \nu)}{2\pi} R_{fer} \quad (1)$$

En considérant les lignes radiales passant par les points I_3 et I_4 , ces derniers sont au même potentiel magnétique que les points I_2 et I_1 respectivement. La différence de potentiel entre ces deux derniers points peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned} (\vec{h} \cdot \vec{l})_{I_1 I_2} &= (\vec{h} \cdot \vec{l})_{I_4 I_3} = N.i \cdot \frac{R_{fer}^{I_3 I_4}}{R_{fer}} \\ \Rightarrow (\vec{h} \cdot \vec{l})_{I_1 I_2} &= N.i \cdot \frac{(2\pi - \nu) \cdot R_{fer}}{2\pi \cdot R_{fer}} = N.i \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2\pi}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

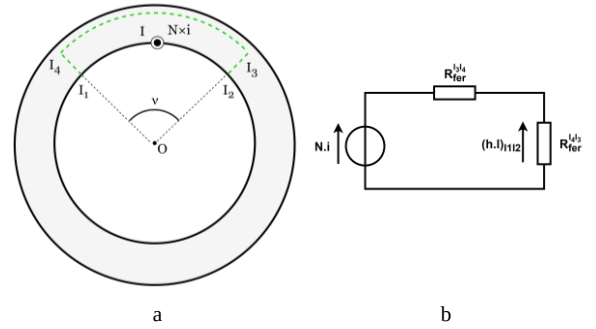


Fig. 4. a : Champ magnétique dans une portion de fer – b : Circuit magnétique

Cette différence de potentiel magnétique (entre I_2 et I_1) va induire, dans l'air, un champ magnétique "de fuite" (Fig. 5). La valeur de la réluctance de fuite R_{fuite} est supposée suffisamment élevée n'affectant pas l'équation (2) (hypothèse 2).

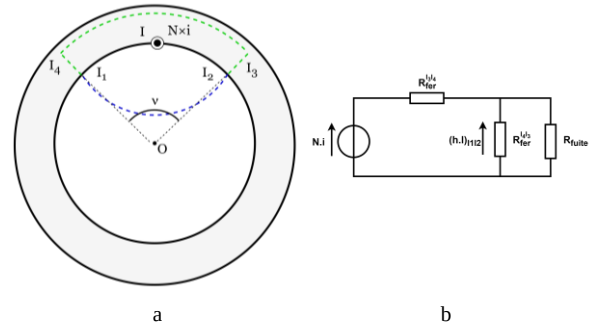


Fig. 5. Lignes de champ "de fuite" dans l'air : a : contour fermé – b : circuit magnétique

Pour calculer l'induction magnétique de fuite, ses lignes sont considérées sous forme d'arcs de cercle centrés au point I (Fig. 6a). Le changement de direction local des lignes de champ, lors du passage entre le fer et l'air, ne sera pas pris en compte.

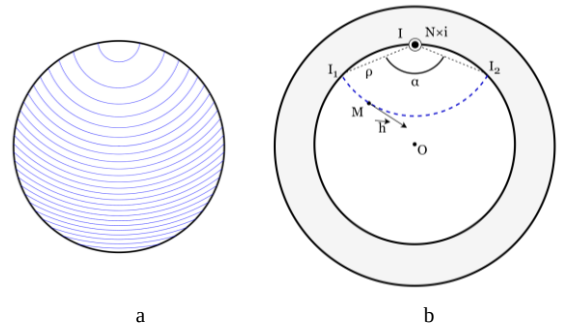


Fig. 6. a : Répartition des lignes de champ - b : Notations

Soit $M(r, \theta)$ un point quelconque localisé en coordonnées polaires (Fig. 6b) par rapport à la référence $\vec{e}_x = \frac{\vec{OI}}{OI}$.

La valeur de ρ , le rayon de la ligne de champ passant par M , peut être calculée géométriquement, tout comme celle des angles α (Fig. 6b) et ν (Fig. 4a). En les introduisant dans la relation (2), il vient que :

$$\begin{aligned} (\vec{h} \cdot \vec{l})_{I_1 I_2} &= h \cdot \rho \cdot \alpha = N \cdot i \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2\pi}\right) \\ \Rightarrow h &= \frac{N \cdot i}{\rho \alpha} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2\pi}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

En projetant le vecteur $\vec{h}$ sur $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ de la base polaire, sont obtenues alors les composantes orthoradiale et radiale du champ magnétique dû à la f.m.m dans l'encoche 'ponctuelle' considérée :

$$b_{r0} = \mu_0 \cdot \vec{h} \cdot \vec{e}_r = -\mu_0 \cdot N \cdot i \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2\pi}\right) \cdot \frac{OI \cdot \sin \theta}{\rho^2 \cdot \alpha} \quad (4)$$

$$b_{\theta 0} = \mu_0 \cdot \vec{h} \cdot \vec{e}_\theta = \mu_0 \cdot N \cdot i \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2\pi}\right) \cdot \frac{r - OI \cdot \cos \theta}{\rho^2 \cdot \alpha} \quad (5)$$

3.2. Prise en compte de l'ouverture d'encoche

Les équations (4) et (5), avec $OI = R_s$, sont valides loin du voisinage de l'encoche. Près de l'ouverture de cette dernière, la trajectoire des lignes de champ est évidemment déviée. Pour en tenir compte, le point de f.m.m I est déplacé de manière paramétrique comme montré à la Fig. 7 tout en supposant que les lignes de champ conservent une forme en arc de cercle.

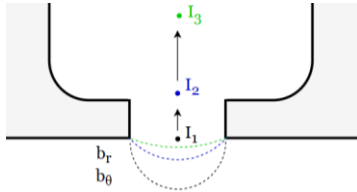


Fig. 7. Changement des lignes de champ en raison de l'ouverture d'encoche

En notant w_s la largeur d'ouverture d'encoche, l'angle y correspondant vaut $\varepsilon = \frac{w_s}{R_s}$. Il faut alors modifier la distance OI au voisinage de l'encoche comme indiqué ci-dessous :

$$OI(r, \theta) = \frac{R_s^2 - r^2}{2 \left(R_s \cos \frac{\varepsilon}{2} - r \cos \theta \right)} \quad (6)$$

Le voisinage de l'encoche (où l'équation (6) s'applique) est conditionné par l'équation suivante :

$$\sqrt{R_s^2 + r^2 - 2R_s r \cos \theta} \leq 2R_s \sin \frac{\varepsilon}{4} \quad (7)$$

3.3. Prise en compte de la culasse rotor

Le modèle simplifié est essentiellement dédié aux machines sans fer au rotor.

Toutefois, il peut être adapté aux machines synchrones à aimants en surface à grands entrefers magnétiques en supposant que la trajectoire des lignes de champ dans l'entrefer magnétique de la Fig. 5a, n'est pas modifiée par l'ajout du fer au rotor. Cette hypothèse ne tient bien évidemment pas compte de la modification locale de la trajectoire des lignes de champ lors du passage de milieu entre l'air et le fer rotorique.

La Fig. 8 montre alors les lignes de champ considérées.

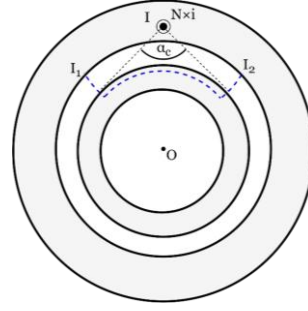


Fig. 8. Lignes de champ magnétique considérées avec fer au rotor

Avec α_c l'angle illustré à la Fig. 8, la formule (3) est alors modifiée et devient :

$$h = \frac{N \cdot i}{\rho(\alpha - \alpha_c)} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{2\pi}\right) \quad (8)$$

Les formules (4) et (5) qui en découlent sont modifiées de même. L'expression de α_c peut être déduite d'un calcul géométrique.

4. VALIDATION DU MODELE ANALYTIQUE

Les résultats issus du modèle analytique simplifié ont été comparés à ceux obtenus par des simulations numériques par éléments finis 2D. Les caractéristiques du stator utilisé pour les calculs sont données au Tableau 1.

Tableau 1. Caractéristiques du stator considéré.

Paramètre	Valeur
Rayon du culasse stator R_s	142,5 mm
Rayon d'observation r	141 mm
(Si présence d'une culasse fer au rotor)	
Entrefer magnétique e_m	13 mm
Nombre d'encoches N_{slot}	48
Nombre de paires de poles p	8
Longueur d'encoche	38 mm
Angle de largeur d'encoche / pas d'encoche	50%
Epaisseur d'isthme	3 mm
Angle d'ouverture d'encoche (ε) / pas d'encoche	1% ou 20% (spécifié avant chaque résultat)
Courant efficace $N \cdot I$	1401,5 Arms

4.1. Simulation avec une encoche statorique

De premières simulations ont été effectuées en alimentant uniquement les conducteurs localisés dans une encoche statorique ($N \cdot I = 4000A$) et en l'absence de rotor. Le fer a été considéré ayant une très grande perméabilité (quasi infinie). Dans le cas d'un angle d'ouverture d'encoche fixé à 1% du pas d'encoche, la répartition des lignes de champ obtenue est montrée à la Fig. 9.

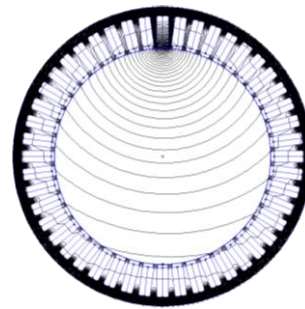


Fig. 9. Lignes de champ dans l'air (éléments finis, une encoche alimentée)

Comme attendu, la majorité des lignes de champ magnétiques sont canalisées dans le fer avec néanmoins des fuites dans l'air dont les trajectoires sont similaires à celles de la Fig. 6a. La comparaison des composantes radiale et tangentielle

de l'induction magnétique obtenues par le modèle simplifié et par les éléments finis est illustrée à la Fig. 10. Les résultats présentent une bonne concordance.

Afin d'évaluer la validité de l'équation (6) pour la prise en compte de l'ouverture d'encoche, celle-ci est augmentée à 20% de la valeur du pas d'encoche. La Fig. 11 montre les lignes de champ obtenues par EF au voisinage de l'ouverture d'encoche.

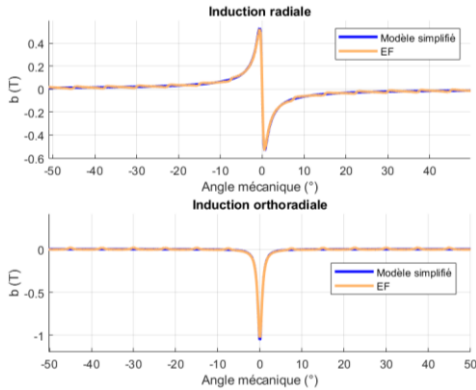


Fig. 10. Composantes de l'induction magnétique: comparaison entre le modèle simplifié et les éléments finis

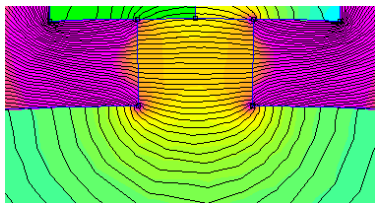


Fig. 11. Lignes de champ au voisinage de l'ouverture d'encoche

La prise en compte de l'ouverture d'encoche permet d'approcher l'induction magnétique au voisinage de cette dernière. La comparaison des résultats entre les 2 modèles effectuée à la Fig. 12 montre que le modèle simplifié surestime légèrement les amplitudes mais les résultats restent cohérents.

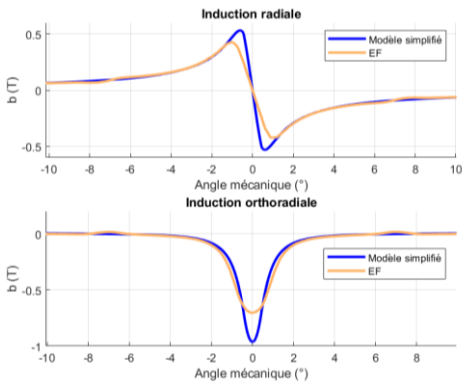


Fig. 12. Composantes de l'induction pour une ouverture à 20% du pas d'encoche - Zoom au voisinage de l'encoche

4.2. Prise en compte des conducteurs retour

L'approche proposée est appliquée au cas plus réaliste tenant compte à la fois des conducteurs aller et retour, placés dans 2 encoches diamétralement opposées. Les résultats des calculs effectués par éléments finis pour une encoche très étroite (1%), en l'absence et présence d'une culasse rotorique, sont montrés à la Fig. 13.

La Fig. 14 compare les composantes radiale et tangentielle de l'induction magnétique obtenues par le modèle simplifié, et par les éléments finis. Le modèle simplifié permet d'approcher les valeurs d'induction obtenues par éléments finis.

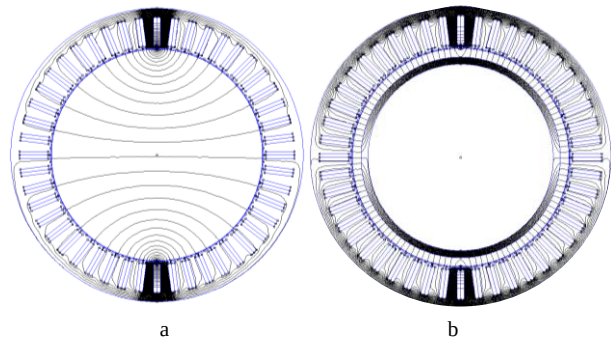


Fig. 13. Lignes de champ a : sans culasse fer et b : avec culasse fer

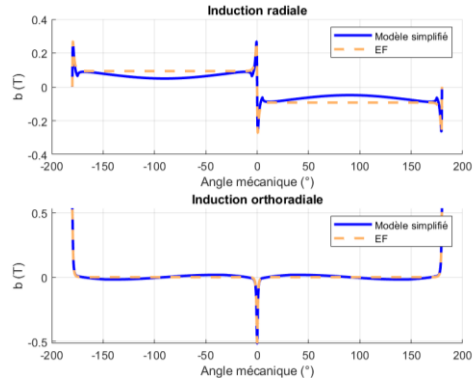
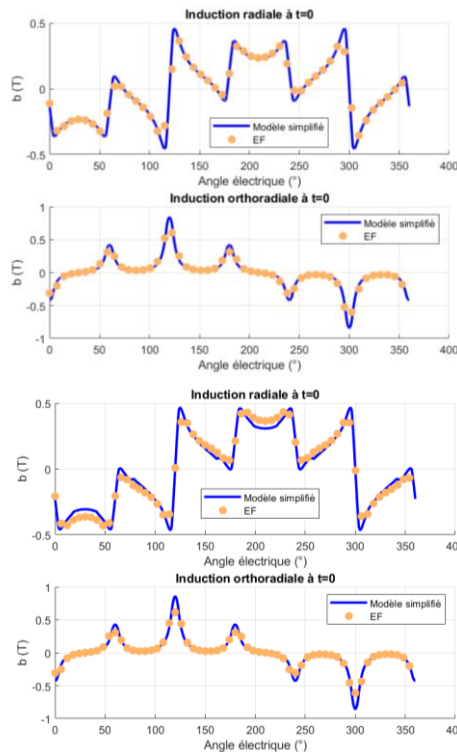


Fig. 14. Composantes de l'induction magnétique avec fer rotor Simulation sur un stator de machine sans culasse rotor

4.3. Simulation d'un stator complet de machine électrique

Enfin, le cas du stator d'une machine électrique (Tableau 1) avec un bobinage triphasé et une ouverture d'encoche réaliste (20%) est étudié. La Fig. 15 montre les évolutions de l'induction magnétique (radiale et tangentielle) en fonction de l'angle électrique, en l'absence et présence de la culasse du rotor. Dans ce dernier cas, l'approche proposée donne également des résultats de précision satisfaisante.



(a) Sans culasse rotor

(b) Avec culasse rotor

Fig. 15. Evolution de l'induction magnétique en fonction de l'angle électrique

4.4. Simulation sur un moteur électrique complet

Dans le cas d'une machine globale, il faut, bien évidemment, tenir compte de l'induction due au rotor. Dans le cas présent, celle-ci a été déterminée à l'aide de la méthode des sous-domaines, en négligeant la saillance d'encoche, et selon la démarche décrite par [3]. L'induction globale dans l'entrefer est ensuite obtenue en sommant vectoriellement les contributions de chacune des armatures. A titre d'exemple, le moteur à aimants en surface avec une aimantation droite (voir Tableau 1), a été étudié en charge. Un zoom du tracé de champ obtenu par éléments finis en considérant la non linéarité magnétique des matériaux est illustré à la Fig. 16.

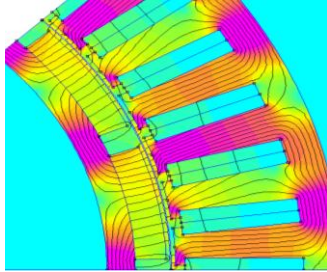


Fig. 16. Moteur électrique simulé en charge – lignes de champ magnétique

Les composantes de l'induction magnétique obtenues sont comparées à la Fig. 17. Des effets de la saturation y sont visibles. Toutefois, cette dernière ne semble pas introduire d'écart notable par rapport aux résultats issus du modèle simplifié de par la taille d'entrefer considérée.

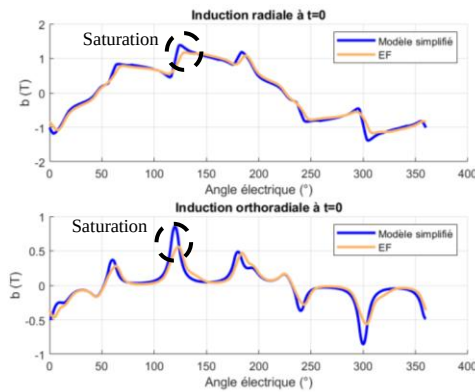


Fig. 17. Induction magnétique - modèle analytique simplifié et éléments finis

La Fig. 18 montre le couple instantané, obtenu par le tenseur de Maxwell, ainsi que sa FFT. Là aussi, la saturation magnétique a peu d'influence sur les résultats, notamment sur les ondulations de couple. La machine présentant un très faible couple de détente, les harmoniques d'ondulations sont très proches (Fig. 18b). Seul un écart de 11% est constaté sur le couple moyen.

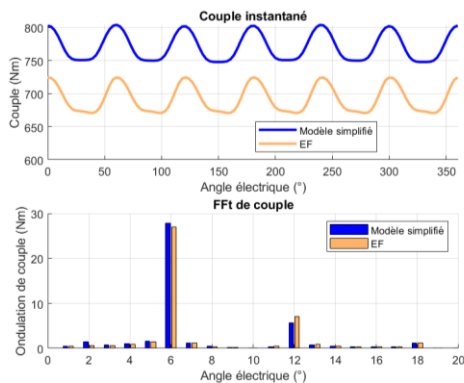


Fig. 18. Couple calculé (valeur instantanée et FFT)

5. COMPARAISON AVEC UN MODELE ANALYTIQUE DE REFERENCE

La performance du modèle simplifié en termes de temps de calcul est comparée à celle du modèle des sous domaines pris comme référence (voir annexe). Ce dernier permet d'estimer tous les harmoniques des composantes de l'induction magnétique. Dans le cas de cette étude, les harmoniques impairs inférieurs à 50 ont été considérés.

Le temps de calcul du modèle simplifié dépendant du nombre d'encoches du stator, la comparaison des temps de calculs a porté sur des structures avec différents nombres d'encoches / paires de pôles. La Fig. 19 présente les temps de calculs (moyennés sur 10 simulations), obtenus pour le modèle de référence et le modèle simplifié. Ce dernier est plus rapide pour un faible nombre d'encoches (ici, $N_{slot} \leq 48$).

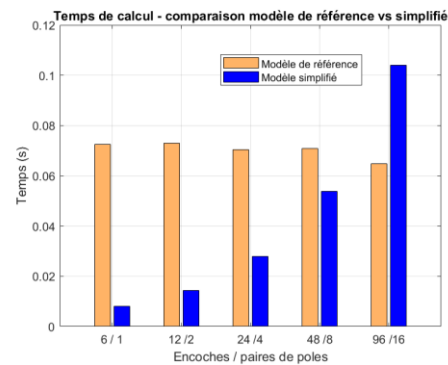


Fig. 19. Temps de calcul des modèles pour nombre d'encoches / paires de poles

6. CONCLUSION

Le modèle analytique simplifié, présenté dans cette communication, est adapté aux machines à aimants en surface. Il repose sur le calcul de l'induction magnétique d'armature, en l'absence de fer au rotor, et en présupposant la trajectoire des lignes de champ magnétique. Sous certaines hypothèses, le modèle permet d'approcher également l'induction magnétique pour des rotors lisses à grands entrefers magnétiques.

Ce modèle simplifié fait preuve d'une bonne précision comparée aux calculs par éléments finis. Par ailleurs, il a été montré, en le comparant à un modèle analytique de référence, qu'il est bien plus rapide pour des machines à faibles nombre d'encoches, ce qui constitue son principal intérêt. Des adaptations sont actuellement en réflexion afin d'accélérer davantage sa résolution pouvant le rendre également intéressant pour des machines ayant un plus grand nombre d'encoches.

7. REMERCIEMENTS

Les auteurs adressent leurs remerciements au programme européen Clean Aviation.

Cette recherche est partiellement financée par l'Union européenne, dans le cadre du programme Horizon Europe-Clean Aviation « Fuel cell propulsion system for Aircraft Megawatt Engines (FAME) ». Convention de subvention ID 101140559. Les points de vue et opinions exprimés n'engagent que leurs auteurs et ne reflètent pas nécessairement ceux de l'Union européenne ou de Clean Aviation. Ni l'Union européenne ni Clean Aviation ne peuvent en être tenus responsables.

Pour plus d'informations sur le projet : <https://cordis.europa.eu/project/id/101140559>.

8. REFERENCES

- [1] B. Gaussens, E. Hoang, O. de la Barriere, J. Saint-Michel, M. Lecrivain, and M. Gabsi, "Analytical Approach for Air-Gap Modeling of Field-Excited Flux-Switching Machine: No-Load Operation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, no. 9, pp. 2505–2517, Sep. 2012, doi: 10.1109/TMAG.2012.2196706.
- [2] B. Koo and K. Nam, "Analytical Torque Ripple Prediction Using Air-Gap Permeance and MMF Functions in PM Synchronous Motors," in *2018 21st International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, Oct. 2018, pp. 302–307. doi: 10.23919/ICEMS.2018.8549021.
- [3] Z. Song, C. Liu, K. Feng, H. Zhao, and J. Yu, "Field Prediction and Validation of a Slotless Segmented-Halbach Permanent Magnet Synchronous Machine for More Electric Aircraft," *IEEE Trans. Transp. Electric.*, vol. 6, no. 4, pp. 1577–1591, Dec. 2020, doi: 10.1109/TTE.2020.2982733.
- [4] K. Zhang, L. Liu, and Y. Wang, "Analytical Modeling and Calculation of High-Speed Surface Mounted PMSM Based on Subdomain Method," in *2024 IEEE 7th International Electrical and Energy Conference (CIEEC)*, May 2024, pp. 647–652. doi: 10.1109/CIEEC60922.2024.10583124.
- [5] S. Zhao, X. Wu, and C. Chen, "No-load Subdomain Model of Permanent Magnet Motor Based on Equivalent Surface Current Method," in *2020 23rd International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS)*, Nov. 2020, pp. 1424–1427. doi: 10.23919/ICEMS50442.2020.9291154.
- [6] A. A. Diriye, Y. Amara, and G. Barakat, "Three-Dimensional Modeling of Permanent Magnets Synchronous Machines Using a 3D Reluctance Network," in *2018 XIII International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, Sep. 2018, pp. 2304–2310. doi: 10.1109/ICELMACH.2018.8506820.
- [7] S. Alshibani, R. Dutta, and V. Agelidis, "Effect of eliminating rotor iron on a mega-watt halbach permanent magnet synchronous generator for wind turbine applications," in *IECON 2016 - 42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, Oct. 2016, pp. 1–6. doi: 10.1109/IECON.2016.7887896.
- [8] E. Devillers, J. Le Besnerais, T. Lubin, M. Hecquet, and J.-P. Lecointe, "An Improved 2-D Subdomain Model of Squirrel-Cage Induction Machine Including Winding and Slotting Harmonics at Steady State," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 54, no. 2, pp. 1–12, Feb. 2018, doi: 10.1109/TMAG.2017.2782222.

9. ANNEXE - MODELE ANALYTIQUE DE REFERENCE

Il est possible de réaliser un modèle analytique basé sur la méthode des sous-domaines, calculant l'induction magnétique due au courant d'alimentation. Les hypothèses de la partie 3 s'appliquent, sauf l'hypothèse 2 qui sera remplacée par : « un fer de perméabilité infinie ».

L'armature stator est considérée lisse (hypothèse 1). Le courant d'armature est remplacé par une densité de courant surfacique h_{theta} (Fig. 20). Une démarche similaire a été adoptée par [8] pour la prise en compte du courant d'armature.

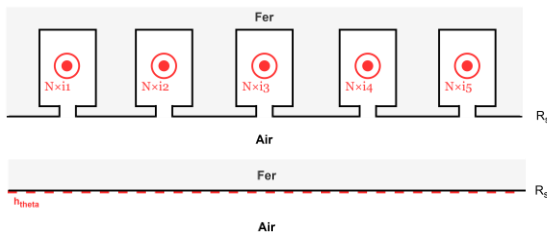


Fig. 20. (en haut) Stator avec encoches - (en bas) Stator lisse simplifié

La méthode des sous-domaines est basée sur la résolution de l'équation de Poisson 2D en magnétostatique :

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9)$$

En alimentation équilibrée, la solution analytique s'écrit de la forme suivante :

$$A(r, \theta) = R_s \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{+\infty} \left(\underline{C}_v \left(\frac{r}{R_s} \right)^v + \underline{D}_v \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-v} \right) e^{iv\theta} \quad (10)$$

Il est ensuite possible de déduire les inductions radiale et orthoradiale via les relations : $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ et $\vec{A} = A \vec{e}_z$.

Deux cas sont à traiter : le cas où le rotor ne comporte pas de fer, et le cas de la présence d'une culasse fer au rotor.

9.1. Cas sans culasse rotor

Le système peut se décrire de la manière suivante (Fig. 21).

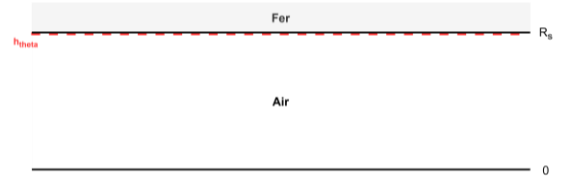


Fig. 21. Modèle de stator sans culasse rotor

Après écriture des conditions aux limites, tous calculs faits :

$$b_r(r, \theta) = \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{+\infty} i |v| \frac{\mu_0 h_{theta,v}}{v} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{|v|-1} e^{iv\theta} \quad (11)$$

$$b_\theta(r, \theta) = \sum_{\substack{v=-\infty \\ v \neq 0}}^{+\infty} -\mu_0 h_{theta,v} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{|v|-1} e^{iv\theta} \quad (12)$$

9.2. Cas avec culasse rotor

L'entrefer magnétique est noté e_m (Fig. 22).

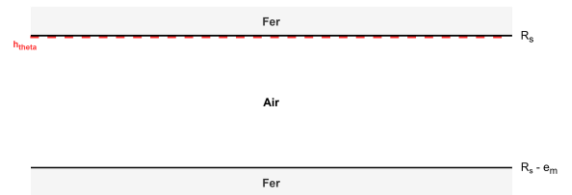


Fig. 22. Modèle de stator avec culasse rotor

La résolution des conditions aux limites donne :

$$b_r(r, \theta) = \sum_{\substack{v=-\infty, v \neq 0}}^{+\infty} i \frac{\mu_0 h_{theta,v}}{1 - \left(1 - \frac{e_m}{R_s}\right)^{2v}} \left(\left(\frac{r}{R_s} \right)^{v-1} + \left(1 - \frac{e_m}{R_s}\right)^{2v} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-v-1} \right) e^{iv\theta} \quad (13)$$

$$b_\theta(r, \theta) = \sum_{\substack{v=-\infty, v \neq 0}}^{+\infty} \frac{-\mu_0 h_{theta,v}}{1 - \left(1 - \frac{e_m}{R_s}\right)^{2v}} \left(\left(\frac{r}{R_s} \right)^{v-1} - \left(1 - \frac{e_m}{R_s}\right)^{2v} \left(\frac{r}{R_s} \right)^{-v-1} \right) e^{iv\theta} \quad (14)$$