

Calcul 3D de la propagation par étapes du leader de foudre à l'intérieur d'un nuage réaliste

Philippe Dessante

Université Paris-Saclay et Sorbonne Université, CentraleSupélec, CNRS,
Laboratoire de Génie Electrique et Electronique de Paris, 91192 Gif-sur-Yvette, France.

RÉSUMÉ

La simulation de la propagation de la foudre est un problème complexe étudié depuis plusieurs années. Ici, nous proposons d'utiliser les informations du potentiel électrique créé à partir d'une structure de nuage réelle pour étudier la propagation. Le potentiel électrique et le champ sont calculés en utilisant une structure de nuage d'orage réaliste : la structure typique à trois couches du nuage est construite à partir d'une photographie réelle de nuage. Les différentes altitudes et séparations de chaque couche sont calculées à partir de la luminosité de l'image et les valeurs de charge d'espace sont prises à partir de données de la littérature. Un modèle de propagation par étapes du leader est proposé. Il consiste à trouver par étapes le chemin qui maximise la différence de potentiel en tenant compte de la charge d'espace du nuage et du leader. Après chaque étape, le potentiel électrique est recalculé, et une nouvelle itération donne une nouvelle direction. Ce cadre nous permet d'analyser diverses configurations de nuages. Seuls les leaders positifs de la couche de base peuvent atteindre le sol si les trois couches sont complètes. Seule la foudre négative atteint le sol lorsque la couche positive inférieure est réduite (typique du milieu d'un orage). Enfin, lorsque les deux couches inférieures sont réduites en taille (typique de la fin de l'orage), la foudre positive de la couche positive supérieure peut se frayer un chemin dans le nuage vers le sol. Ces observations simulées sont en accord avec les hypothèses faites précédemment par Nag et Rakov.

1. INTRODUCTION

La foudre est un domaine de recherche largement étudié depuis plusieurs années. Comme la reproduction en laboratoire des phénomènes de foudre est difficile [1],[2], [3], de plus en plus d'études utilisent la modélisation et la simulation par ordinateur pour comprendre la propagation des leaders dans les nuages ou vers le sol et les structures [4]. Elles utilisent un mélange de modélisation macroscopique [5],[6],[7],[8] et d'heuristiques comme les fractales [9], [10] pour simuler la formation et la propagation du leader (traceur) par étapes.

Dans cet article, nous utilisons un modèle macroscopique et une heuristique basée sur la maximisation du potentiel électrique pour trouver la direction d'un leader. Ce type de modèle a déjà été utilisé dans l'article de Lalande *et al.* [11], mais avec une structure de nuage cylindrique. Ici, nous utilisons le même type de structure de nuage (nuage à 3 couches) mais basé sur une image réelle de nuage et des altitudes.

Cette étude vise à vérifier les différentes hypothèses faites par les auteurs dans [12] et [13]. Ils tentent d'expliquer, sur la base

d'une étude théorique et de mesures, les différentes possibilités de propagation du leader vers le sol (nuage-sol ou CTG) ou dans le nuage (intra-nuage : nuage à nuage CTC) en fonction de leur polarité et de la structure du nuage.

Une structure de charge de nuage typique est basée sur trois couches différentes : en haut du nuage, une charge positive ; au milieu, une charge négative ; et en bas, une charge positive limitée [14]. Plusieurs simulations ont été réalisées sur la base de règles heuristiques pour la propagation du leader [7][15][16], mais à notre connaissance, aucune ne prend en compte un nuage réaliste.

Les différentes couches du nuage peuvent influencer la propagation du leader comme proposé par Nag et Rakov [12] [13] [2] : la couche de base positive peut, d'une part, accélérer le développement de la foudre nuage-sol, mais elle peut aussi protéger la partie inférieure du nuage de la foudre supérieure, favorisant le développement de la foudre inter ou intra-nuage, en fonction du point d'origine de l'initiation du leader.

Cette recherche utilise trois types de structures de nuages : une structure de nuage à trois couches complètes, une couche de base réduite, puis les deux couches inférieures réduites. Ces structures peuvent imiter la distribution précise des charges électriques à différents moments de l'orage.

Cette répartition de la charge d'espace est utilisée pour calculer une distribution de potentiel électrique au-dessus du sol. Un modèle de propagation du leader est ensuite proposé : le leader se propage dans la direction de la différence maximale en termes de potentiel électrique. Différentes altitudes pour l'initiation du leader sont testées. Les simulations tendent à valider l'hypothèse selon laquelle la foudre positive nuage-sol provient de la couche de base. Cette forme de couche de base positive forme également un bouclier pour la foudre négative qui tend à être intra-nuage. La foudre négative doit bénéficier de faiblesses ou de trous dans la couche de base positive pour se propager vers le sol.

Une définition du modèle de nuage sera présentée dans la section 2, puis le modèle macro du leader par étapes sera introduit dans la section 3. La section 4 expliquera comment nous calculons le potentiel électrique du nuage et du leader. Les résultats seront présentés dans la section 5, et une conclusion et des perspectives clôtureront cet article.

2. MODÈLE DE NUAGE

La figure 1 montre une photographie de nuages d'orage au-dessus de Paris. Nous utiliserons les informations de cette photographie pour construire la structure géométrique du nuage. La photographie est rognée pour ne prendre que la partie nuage (Figure 2a). L'image résultante est ensuite convertie en noir et blanc,



FIGURE 1. Photographie de nuages d'orage au-dessus de Paris (Ph. Dessante)

et un lissage basé sur un filtre gaussien est appliqué (figure 2b).

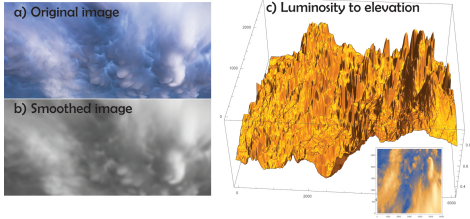


FIGURE 2. Photographie de nuages d'orage au-dessus de Paris (Ph. Dessante) (a), version en noir et blanc et lissée (b), calcul d'élévation basé sur la luminosité (c)

La luminosité de l'image est ensuite analysée, et son niveau est stocké dans un tableau à deux dimensions. Ces niveaux sont convertis en altitude (plus de lumière signifie moins d'altitude) pour former la couche de base du nuage (figure 2c).

Une structure de nuage typique [14] est basée sur trois couches différentes : en haut du nuage, une grande charge positive ; au milieu, une charge négative ; et en bas, une charge positive limitée. Dans les études précédentes, [11], les nuages sont généralement modélisés en 3D par des zones cylindriques.

La carte d'altitude générée est répétée à chaque altitude de séparation de charge : voir la figure 3, où la couleur représente le signe de la charge d'espace (rouge pour la charge négative et bleu à orange pour la charge positive). Les différentes altitudes sont prises dans la littérature [11][14]. Pour les dimensions longitudinales et latérales du nuage, les dimensions sont choisies arbitrairement en fonction de l'image mais aussi pour avoir une dimension spatiale suffisamment grande pour la propagation du leader.

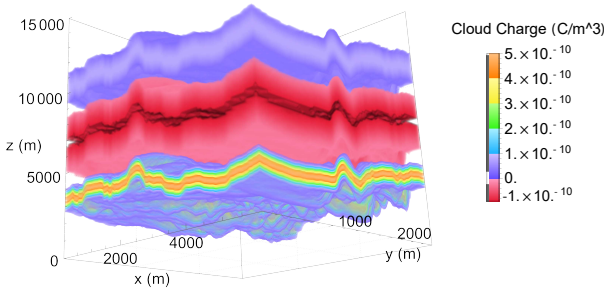


FIGURE 3. Modélisation de la structure du nuage : charge d'espace négative en rouge, charge d'espace positive du bleu à l'orange

Sur la base de la littérature [11],[14], nous avons pris une den-

sité de charge d'espace positive de $c_1 = 0.21 \times 10^{-9} \text{ C/m}^3$ pour la couche inférieure positive, une densité de charge d'espace négative de $c_2 = -0.18 \times 10^{-9} \text{ C/m}^3$ dans la couche du milieu et une densité de charge d'espace positive de $c_3 = 1.3 \times 10^{-9} \text{ C/m}^3$ pour la couche supérieure.

L'équation de la répartition de la charge d'espace est donné par :

$$\rho(x, y, z) = \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} \times \exp \left[\frac{-(z - m_1(x, y))^2}{2\sigma_1^2} \right] + \frac{c_2}{\sqrt{2\pi}} \times \exp \left[\frac{-(z - m_2(x, y))^2}{2\sigma_2^2} \right] + \frac{c_3}{\sqrt{2\pi}} \times \exp \left[\frac{-(z - m_3(x, y))^2}{2\sigma_3^2} \right] \quad (1)$$

où $\sigma_{1,2,3}$ sont respectivement l'écart type de chaque gaussienne (300m, 2000m et 750m), ils sont choisis arbitrairement pour assurer une transition douce entre les couches positives et négatives. $m_{1,2,3}$ sont le milieu de chaque couche de nuage (4000m, 7500m et 11000m).

3. MODÈLE DE PROPAGATION DU LEADER PAR ÉTAPES

Un point de départ X_0 pour la propagation du leader est choisi dans le nuage. Pour chaque itération n de la propagation, nous trouvons d'abord avec l'aide d'un algorithme d'optimisation de gradient déterministe la différence de potentiel maximale dans une sphère de $r_c = 50\text{m}$ de rayon autour de la tête du leader. Pour ce rayon de recherche, l'étape du leader doit être inférieure à 50m, ce qui est cohérent avec la revue de la littérature dans [17]. Dans le cas d'un leader positif, cela conduit au problème :

$$\begin{aligned} &\underset{X}{\text{maximise}} && V(X_n) - V(X) \\ &\text{sous contraintes} && |X - X_n| < r_c \end{aligned} \quad (2)$$

et dans le cas d'un leader négatif au problème d'optimisation :

$$\begin{aligned} &\underset{X}{\text{maximise}} && V(X) - V(X_n) \\ &\text{sous contraintes} && |X - X_n| < r_c \end{aligned} \quad (3)$$

Ces deux formulations peuvent être reformulées respectivement comme :

$$\begin{aligned} &\underset{X}{\text{minimise}} && V(X) \\ &\text{sous contraintes} && |X - X_n| < r_c \end{aligned} \quad (4)$$

et :

$$\begin{aligned} &\underset{X}{\text{maximise}} && V(X) \\ &\text{sous contraintes} && |X - X_n| < r_c \end{aligned} \quad (5)$$

Pour représenter le comportement stochastique de la propagation du leader, un point aléatoire est choisi autour de ce maximum (dans une sphère de 10m de rayon) qui devient la nouvelle tête du leader. Le leader est propagé avec un rayon constant $r_l = 5\text{m}$ et une densité de charge d'espace égale à $50 \times 10^{-6} / (\pi r_l^2) \text{ C/m}^3$ si le leader provient d'une région positive et $-150 \times 10^{-6} / (\pi r_l^2)$ s'il provient d'une région négative [11][18]. Avec $r_l = 5\text{m}$, le rayon du leader est quelque peu surestimé en raison de contraintes mathématiques pour la résolution de l'équation de Poisson (8).

Le potentiel est ensuite recalculé par l'équation (8) en tenant compte de la nouvelle charge d'espace et d'un nouveau maillage raffiné.

4. ÉVALUATION DU POTENTIEL ÉLECTRIQUE

La formation et la propagation de la foudre sont principalement dues à des phénomènes électrostatiques [14], qui sont causés par le champ électrique. Pour calculer le champ électrique E , il faut résoudre l'équation de Poisson :

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6)$$

où ρ est la charge d'espace, et ε_0 est la constante diélectrique dans le vide.

Avec l'introduction de la distribution de potentiel V :

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (7)$$

L'équation de Poisson peut être écrite comme :

$$\Delta V(x, y, z) = -\frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0} \quad (8)$$

Les conditions aux limites sont définies par une condition de Dirichlet à la surface de la terre :

$$V(x, y, 0) = 0 \quad (9)$$

et des conditions de Neumann sur les autres frontières $\partial\Omega$:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0 \quad (10)$$

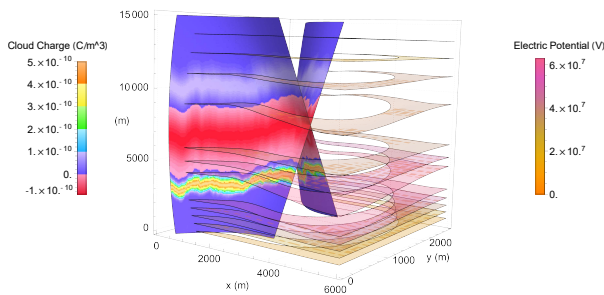


FIGURE 4. Potentiel Électrique (iso-plans), charge d'espace (tracée sur une surface) pour une structure de nuage à 3 couches complètes

Nous utilisons une méthode des éléments finis (FEM) avec l'aide du logiciel Wolfram Mathematica pour résoudre l'équation de Poisson en trois dimensions.

Une étape du leader est symbolisée par une forme cylindrique 3D avec des extrémités sphériques, et son volume entier est peuplé d'une charge d'espace positive ou négative selon son point d'origine.

Pour une structure à 3 couches, la cartographie du potentiel est donnée sur la figure 4 et le champ électrique sur la figure 5.

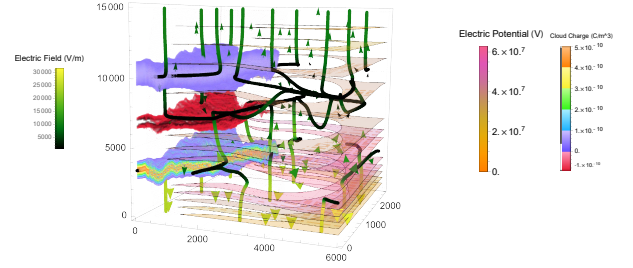


FIGURE 5. Champ Électrique (vecteur et tracé de ligne), Potentiel Électrique (niveaux de surface), charge d'espace (volume à gauche) pour une structure de nuage à 3 couches complètes

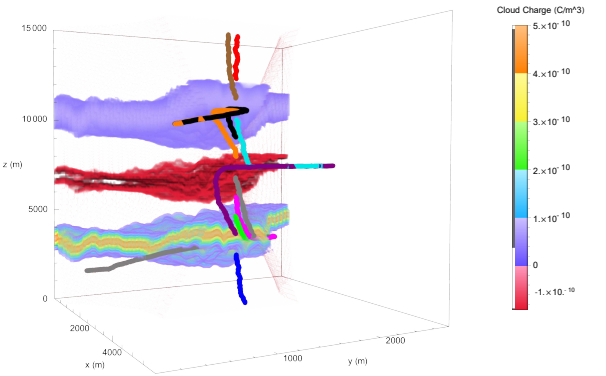


FIGURE 6. Propagation de la foudre dans une structure de nuage complète, voir le tableau 1 pour les données d'initialisation, volume à l'arrière : charge d'espace du nuage

5. RÉSULTATS

5.1. Nuage à Trois Couches

Le premier ensemble de résultats est présenté dans la figure 6. La structure complète du nuage en trois couches complètes est prise en compte. Dix points de départ sont considérés, ils prennent naissance au milieu du nuage en coordonnées latérales et longitudinales et à des altitudes de 3000m à 12000m au-dessus du niveau du sol avec intervalle de 1000m. Les résultats sont résumés dans le tableau 1, qui indique l'altitude d'initiation, la couleur des leaders dans la figure 6, la charge initiale du leader, la direction générale vers le haut ou vers le bas, et s'ils sont des leaders nuage-sol (CTG) ou inter ou intra nuage (CTC).

Le seul leader qui se connecte au sol est le leader positif provenant de la partie inférieure de la couche de base positive (initiation à 3000m en bleu). Les leaders négatifs de la partie centrale négative du nuage (entre 5000m et 9000m) sont piégés entre les deux couches positives (inférieure et supérieure). Ils atteignent l'altitude de séparation (soit vers le haut soit vers le bas) entre les couches et ne peuvent plus se propager verticalement. Ces leaders négatifs ne peuvent pas atteindre le sol, qui est protégé par la couche positive inférieure comme le montrent théoriquement Nag et Rakov [12].

Il faut noter qu'aucun éclair positif provenant de la partie supérieure du sol (initiation de 10000m à 12000m) ne peut atteindre le sol, la couche de leader négatif du milieu forme une protection

TABLE 1. Conditions initiales et résultats pour la structure de nuage à trois couches

Altitude (m)	Couleur	Charge	Direction	Type
3000	Bleu	+	↓	CTG
4000	Violet	+	↑	CTC
5000	Vert	-	↓	CTC
6000	Magenta	-	↓	CTC
7000	Gris	-	↓	CTC
8000	Orange	-	↑	CTC
9000	Noir	-	↑	CTC
10000	Cyan	+	↓	CTC
11000	Marron	+	↑	CTC
12000	Rouge	+	↑	CTC

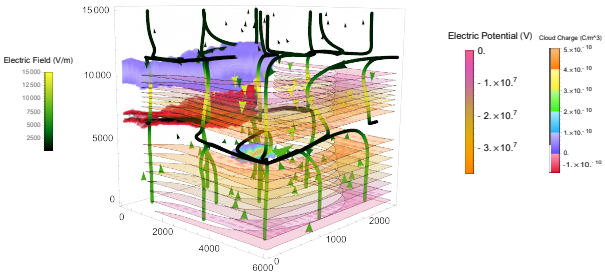


FIGURE 8. Champ Électrique (vecteur et tracé de ligne), Potentiel Électrique (niveaux de surface), charge d'espace (volume à gauche) pour une structure de nuage à couche inférieure réduite

vers le sol et empêche les leaders de descendre plus loin.

Ces résultats sont reproductibles avec quelques variations sur plusieurs exécutions.

5.2. Nuage à Deux Couches Complètes, Couche Inférieure Réduite

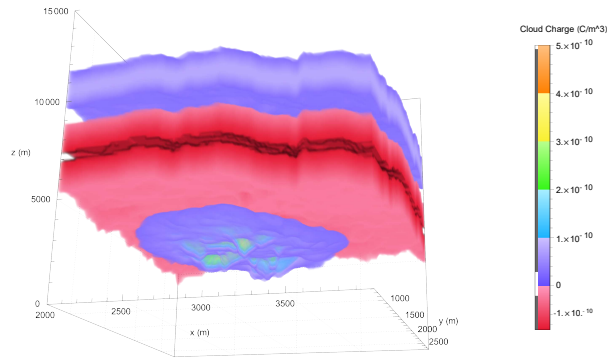


FIGURE 7. Structure du nuage et charge d'espace pour une couche inférieure réduite

Pour vérifier l'hypothèse de Nag et Rakov [12] [13], nous avons réduit la couche de base positive autour du milieu du nuage. La nouvelle charge d'espace du nuage est montrée dans la figure 7. Il faut noter que, comme pour le modèle de nuage original, la transition vers une charge d'espace neutre ou vers d'autres couches est lissée par des fonctions gaussiennes pour assurer une résolution FEM appropriée.

Le nouveau potentiel 3D (surfaces iso-potentielles) de la charge d'espace du nuage est montré dans la figure 8 le long du champ électrique (flèches et lignes de courant). Les mêmes conditions d'initiation que dans la section précédente sont prises comme indiqué dans le tableau 2.

Les propagations des leaders sont montrées dans la figure 9. Cette fois, le leader négatif rose venant du point d'initiation à 6000m à l'intérieur de la couche négative peut contourner la couche de base réduite et atteindre le sol. Cette simulation valide l'hypothèse théorique de Nag et Rakov [12] et montre que la foudre négative doit profiter de certaines faiblesses ou trous dans la couche de base positive pour se propager vers le sol.

Dans cette configuration, les leaders positifs provenant de la

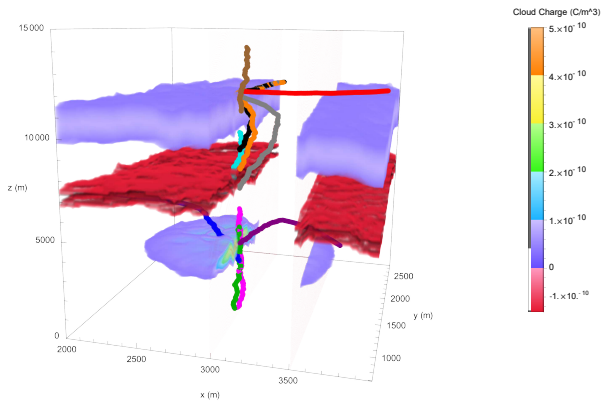


FIGURE 9. Propagation de la foudre dans une structure de nuage à couche inférieure réduite, voir le tableau 2 pour les données d'initialisation, volume : charge d'espace du nuage (coupé pour plus de clarté)

couche de base sont attirés vers la couche négative du milieu, et aucun d'entre eux ne peut atteindre le sol. C'est également le cas pour la partie supérieure des nuages, comme dans la simulation précédente.

Lors des orages classiques, la grande majorité des coups de foudre atteignant le sol sont négatifs. Le modèle commun de la charge d'espace du nuage est également en accord avec ce type de répartition [14], où la couche positive inférieure est largement réduite en taille ou en épaisseur.

5.3. Nuage à Une Couche Complète et Deux Couches Inférieures Réduites

Enfin, nous traitons le cas représentatif des derniers moments de l'orage. Sous l'effet des différentes vitesses du vent en altitude et du développement horizontal du nuage, la couche positive supérieure s'étend latéralement et devient beaucoup plus grande que les couches inférieures [14].

La charge d'espace résultant de cette déformation est modélisée et montrée sur la figure 10. Les couches positive et négative inférieures sont réduites latéralement à l'aide d'une gaussienne 3D centrée au milieu du nuage, assurant qu'aucun gradient élevé ne peut perturber la résolution de l'équation de Poisson. Le potentiel électrique (surface iso-potentielle) pour ce calcul est montré dans la figure 11 le long du champ électrique (flèches et lignes de courant). Les mêmes altitudes d'initiation que dans la section

TABLE 2. Conditions initiales et résultats pour la structure de nuage à deux couches

Altitude (m)	Couleur	Charge	Direction	Type
3000	Bleu	+	↑	CTC
4000	Violet	+	↑	CTC
5000	Vert	-	↓	CTG
6000	Magenta	-	↓	CTG
7000	Gris	-	↑	CTC
8000	Orange	-	↑	CTC
9000	Noir	-	↑	CTC
10000	Cyan	+	↓	CTC
11000	Marron	+	↑	CTC
12000	Rouge	+	↑	CTC

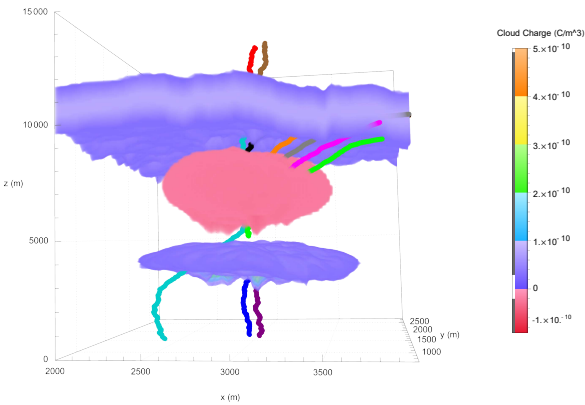


FIGURE 12. Propagation de la foudre dans une structure de nuage à couches inférieure et moyenne réduites, voir le tableau 3 pour les données d'initialisation

TABLE 3. Conditions initiales et résultats pour la structure de nuage à une couche

Altitude (m)	Couleur	Charge	Direction	Type
3000	Bleu	+	↓	CTG
4000	Violet	+	↓	CTG
5000	Vert	-	↑	CTC
6000	Magenta	-	↑	CTC
7000	Gris	-	↑	CTC
8000	Orange	-	↑	CTC
9000	Noir	-	↑	CTC
10000	Cyan	+	↓	CTG
11000	Marron	+	↑	CTC
12000	Rouge	+	↑	CTC

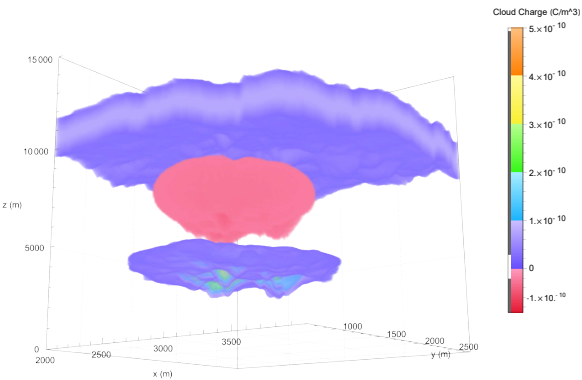


FIGURE 10. Structure du nuage et charge d'espace pour des couches inférieure et moyenne réduites

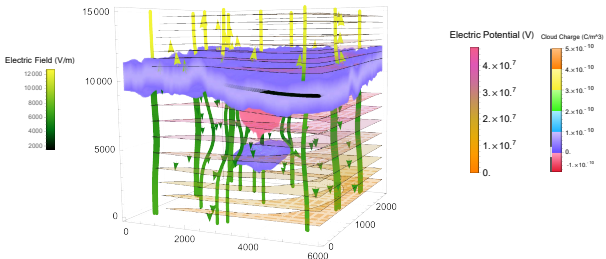


FIGURE 11. Champ Électrique (vecteur et tracé de ligne), Potentiel Électrique (niveaux de surface), charge d'espace (volume à gauche, pour une structure de nuage à couches inférieure et moyenne réduites)

précédente sont prises, comme indiqué dans le tableau 3.

La propagation des différents leaders est montrée sur la figure 12. Dans cette situation, les seuls leaders se connectant au sol sont ceux des parties positives supérieure et inférieure du nuage. La charge d'espace positive supérieure attire les leaders de la partie négative du milieu.

Les deux leaders provenant de la couche positive inférieure (bleu et magenta) sont attirés comme dans le premier cas (scénario à 3 couches) par le sol : la différence de potentiel donnée par l'équation 2 est plus importante dans cette direction.

Le leader provenant de la couche positive supérieure (cyan) est d'abord attiré vers le nuage négatif du milieu, mais il peut le tra-

verser car il est réduit. La couche positive inférieure courbe les lignes de champ et repousse le leader vers sa bordure. Enfin, il peut trouver un chemin autour de cette couche positive vers le sol.

Ce scénario vise à modéliser les derniers moments de l'orage. Il a été observé [14], [12],[13] que pendant la dernière phase de l'orage, la foudre positive devient la majorité de la foudre qui se connecte au sol.



FIGURE 13. Photo d'un orage montrant des leaders CTG inférieurs et des leaders CTC supérieurs. Photographie Ph. Dessante

6. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons utilisé un modèle de propagation de la foudre visant à tester les hypothèses faites par Nag et Rakov sur les différentes possibilités de propagation des leaders nuage-sol ou inter ou intra-nuage. Nous avons construit un nouveau modèle

de nuage à partir d'une image d'un véritable nuage d'orage à cette fin. La charge d'espace à l'intérieur du nuage est composée de trois couches : une charge positive en bas et en haut, et une couche de charge négative au milieu.

Cette charge d'espace est utilisée pour calculer un potentiel électrique. L'introduction d'un modèle de propagation de leader par étapes nous aide à caractériser, pour différentes altitudes d'initiation, le comportement de la foudre à l'intérieur du nuage. Nous avons constaté que lorsque la couche positive inférieure couvre tout le nuage en latitude et longitude, elle protège le sol de la foudre négative car elle repousse les leaders négatifs à l'intérieur du nuage. Seuls les leaders positifs de la couche positive inférieure atteignent le sol dans ce cas.

Si la couche positive inférieure est réduite en taille, ce qui est plus représentatif d'un nuage d'orage typique [14], la seule foudre atteignant le sol est une foudre négative qui prend naissance dans la couche centrale du nuage.

En raison des gradients de vent, la fin d'un orage est caractérisée par des couches inférieure et moyenne réduites. Dans ce scénario, comme proposé par Nag et Rakov [12],[13], seuls les leaders provenant des deux couches positives peuvent atteindre le sol.

Ce modèle associé à cette structure de nuage nous a permis de valider ces hypothèses. La photographie présentée dans l'image 13, où la foudre atteignant le sol provient de la partie inférieure du nuage, corrobore visuellement ces hypothèses.

Nous pensons que ce modèle, associé à d'autres structures de nuages, peut améliorer la compréhension de la propagation des leaders dans différents types de nuages (trous ou réduction de l'épaisseur des couches, par exemple).

À l'avenir, nous prévoyons d'introduire des ramifications dans le modèle de propagation pour avoir une meilleure représentation de la foudre, dans ce cas, il faut calculer le potentiel électrique de chaque branche, et cela induira une interaction entre les branches.

Une autre amélioration consiste à réduire le rayon du leader pour avoir une meilleure estimation du champ électrique. Cela pourrait conduire à une condition d'arrêt pour la propagation du leader.

Cet article est une traduction abrégée d'un article publié [19].

- [1] g. Les Renardières, others, "Research on long air gap discharges at Les Renardières", *Electra* **23** (1972), p. 53-157.
- [2] g. Les Renardières, others, "Research on long air gap discharges at les Renardières –1973 results", *Electra* **35** (1974), p. 49-156.
- [3] g. Les Renardières, others, "Positive Discharges in Long Air Gaps at Les Renardières –1975 Results and Conclusions", *Electra* **53** (1977), p. 31-153.
- [4] A. A. Syssoev, D. I. Iudin, A. A. Bulatov, V. A. Rakov, "Numerical Simulation of Stepping and Branching Processes in Negative Lightning Leaders", *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* **125** (2020), no. 7 (en), p. e2019JD031360, <http://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2019JD031360> (accessed 2020-10-01), _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2019JD031360>.
- [5] M. Vargas, H. Torres, "On the development of a lightning leader model for tortuous or branched channels – Part II : Model results", *Journal of Electrostatics* **66** (2008), no. 9 (en), p. 489-495, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304388608000624> (accessed 2022-08-30).
- [6] Y. Xu, M. Chen, "An improved 3-D self-consistent stochastic stepped leader model", in *2011 7th Asia-Pacific International Conference on Lightning*, 2011, p. 699-705.
- [7] D. Xu, Y. Tan, T. Zheng, H. Lin, Z. Shi, Y. Lei, M. Liu, H. Wang, J. Yu, "Numerical Simulation on the Effects of the Horizontal Charge Distribution on Lightning Types and Behaviors", *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* **126** (2021), no. 18 (en), p. e2020JD034375, <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2020JD034375> (accessed 2022-08-29), _eprint : <https://agupubs.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2020JD034375>.
- [8] V. Cooray, L. Arevalo, "Modeling the Stepping Process of Negative Lightning Stepped Leaders", *Atmosphere* **8** (2017), no. 12 (en), p. 245, <https://www.mdpi.com/2073-4433/8/12/245> (accessed 2019-05-16).
- [9] R. Ghaffarpour, S. Zamanian, "Fractal-based lightning model for investigation of lightning direct strokes to the communication towers", *Electrical Engineering* **104** (2022), no. 4, p. 2543-2551, <https://doi.org/10.1007/s00202-022-01503-w>.
- [10] A. I. Ioannidis, P. N. Mikropoulos, T. E. Tsovilis, N. D. Kokkinos, "A Fractal-Based Approach to Lightning Protection of Historical Buildings and Monuments : The Parthenon Case Study", *IEEE Industry Applications Magazine* **28** (2022), no. 4, p. 20-28, Conference Name : IEEE Industry Applications Magazine.
- [11] P. Lalande, V. Mazur, "A Physical Model of Branching in Upward Leaders", *AerospaceLab* (2012), no. 5, p. 1-7, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01184412> (accessed 2018-04-03).
- [12] A. Nag, V. A. Rakov, "Some inferences on the role of lower positive charge region in facilitating different types of lightning", *Geophysical Research Letters* **36** (2009), no. 5 (en), <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2008GL036783> (accessed 2022-08-29), _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2008GL036783>.
- [13] A. Nag, V. A. Rakov, "Positive lightning : An overview, new observations, and inferences", *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* **117** (2012), no. D8 (en), <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1029/2012JD017545> (accessed 2022-08-29), _eprint : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1029/2012JD017545>.
- [14] V. Cooray, G. Cooray, I. o. E. Engineers, *The Lightning Flash*, Energy Engineering Series, Institution of Engineering and Technology, 2003, https://books.google.fr/books?id=2b3_IztUdmEC.
- [15] A. A. Dul'zon, V. V. Lopatin, M. D. Noskov, O. I. Pleshkov, "Modeling the development of the stepped leader of a lightning discharge", *Technical Physics* **44** (1999), no. 4 (en), p. 394-398, <http://link.springer.com/10.1134/1.1259308> (accessed 2022-09-13).
- [16] Y. Xu, M. Chen, "A 3-D Self-Organized Leader Propagation Model and Its Engineering Approximation for Lightning Protection Analysis", *IEEE Transactions on Power Delivery* **28** (2013), no. 4, p. 2342-2355, Conference Name : IEEE Transactions on Power Delivery.
- [17] F. A. Rizk, "Modeling of Lightning Stepped Leader Characteristics", *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation* (2024), p. 1-1, <https://ieeexplore.ieee.org/document/10461103> (accessed 2024-03-18), Conference Name : IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation.
- [18] P. Lalande, A. Bondiou-Clergerie, G. Bacchiega, I. Gallimberti, "Observations and modeling of lightning leaders", *Comptes Rendus Physique* **3** (2002), no. 10, p. 1375-1392, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631070502014135>.
- [19] P. Dessante, "3D Computation of Lightning Leader Stepped Propagation Inside a Realistic Cloud", *Comptes Rendus. Physique* **25** (2024), no. S1 (fr), p. 87-108, <https://comptes-rendus.academie-sciences.fr/physique/articles/10.5802/crphys.189/> (accessed 2025-05-15).