

Optimisation topologique de dispositifs magnétiques : état de l'art et implémentations

Théodore Cherrière¹, Thomas Gauthey^{1,2,3}, Stéphane Gaydier^{4,5,6}, Maya Hage-Hassan¹

¹ Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, Sorbonne Université, CNRS, GeePs, 91192, Gif-sur-Yvette, France

² CMAP, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France ³ Safran Additive Manufacturing Campus, 33187, Le Haillan, France

⁴ Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, G2Elab, 38000 Grenoble, France ⁵ Schneider Electric, 38320 Eybens, France

⁶ Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LJK, 38000 Grenoble, France

RÉSUMÉ – Cet article propose un panorama des principales méthodes d'optimisation topologique. Les principes de chaque grande famille (homogénéisation, densité, level-set, BESO) sont détaillés. Les méthodes sont ensuite évaluées sur le cas-test d'optimisation d'un transformateur, soit la maximisation du flux en provenance d'un enroulement primaire dans un enroulement secondaire, puis comparées à une méthode heuristique sans gradient. Afin de faciliter la prise en main des méthodes et la reproductibilité des résultats, tous les codes ayant servi à générer les résultats de cet article sont disponibles en open-source [1].

Mots-clés – Méthode à densité, Level-set, méthode de l'adjoint, magnétostatique, transformateur.

1. INTRODUCTION

Initialement introduites en génie électrique à la fin des années 90 par [2, 3], le développement de méthodes d'optimisation topologique s'est récemment accéléré, porté par les progrès de la fabrication additive au cours des dernières années [4]. On peut les définir comme des méthodes automatiques de répartition optimale de matière, sans limitation intrinsèque sur les géométries potentiellement atteignables, comme illustré sur la Figure 1. En particulier, elles ne dépendent pas d'une paramétrisation géométrique qui serait définie *a priori* par un concepteur selon son expérience, nécessairement subjective et limitée.

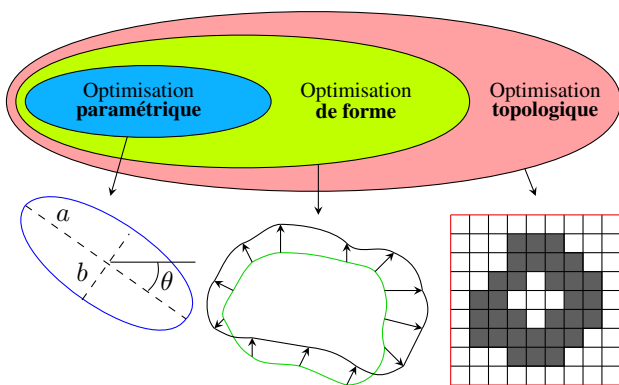


FIG. 1. Grandes familles d'optimisation de structures.

On distingue plusieurs approches, résumée ci-dessous :

- les **méthodes à densité**, aussi appelées "SIMP" (Solid Isotropic Material with Penalization), pour lesquelles la variable d'optimisation est la "densité" de matériau en chaque point, et qui sont les méthodes les plus utilisées depuis [2]. Bien qu'elles permettent facilement des changements de topologie, elles s'appuient sur des matériaux intermédiaires non-physiques ;

- les approches d'**homogénéisation** [5], qui généralisent les méthodes à densité en interprétant les matériaux intermédiaires comme des matériaux microstructurés. Il faut alors choisir le type de microstructure, puis optimiser leurs propriétés en chaque point du domaine de design ;
- pour se passer de l'utilisation de matériaux intermédiaires ou de microstructures, on peut utiliser des **méthodes ON/OFF** comme l'approche BESO (bidirectional evolutionary structural optimization) [6]. L'espace de design est alors découpé en briques élémentaires pouvant commuter d'un état ON (rempli de matière) à OFF (rempli de vide ou d'air). Le problème est discret, et peut conduire à des instabilités ;
- on peut alors considérer la méthode de la **ligne de niveau** (*level-set*), qui décrit implicitement une géométrie par l'équation $\varphi = 0$, avec φ une fonction "lignes de niveaux" définie sur l'espace de design : $\varphi < 0$ correspond à une zone de matière et $\varphi > 0$ à une zone de vide ou d'air [7]. Cette fonction peut évoluer continûment, guidée par la dérivée de forme [8] ou la dérivée topologique [9].

D'autres méthodes moins utilisées existent comme le champ de phase [10] ou de projection [11], non traitées dans cet article ; on peut aussi adopter des approches hybrides [12]. En théorie, ces méthodes peuvent proposer des répartitions de matières optimales et innovantes, voire inaccessibles à l'imagination humaine grâce à la grande dimension de l'espace des possibles. Pour ce faire, il convient de considérer un grand nombre de variables de conception (typiquement supérieur à 1000), directement lié au nombre d'éléments de discrétisation géométrique qu'on souhaite la plus fine possible. Le temps de calcul associé à la résolution des équations de la physique est alors important ; on utilise généralement la méthode des éléments finis (MEF), bien que d'autres méthodes soient possibles, comme les réseaux de réductance [13]. Les méthodes d'optimisation topologique doivent donc s'appuyer sur des algorithmes rapides de descente de gradient pour converger en un temps raisonnable et limiter le nombre d'appels au solveur physique. Le calcul des sensibilités de la fonction objectif s'effectue très efficacement à l'aide de la méthode de l'adjoint [14]. De ce fait, ces méthodes sont réputées difficiles à mettre en œuvre, tant pour l'implémentation (forte intrusivité), le niveau mathématique requis (formulations variationnelles, méthode de l'adjoint), et l'interprétation des résultats (problèmes mal-posés, dépendance au maillage, matériaux intermédiaires).

L'objectif de cet article est donc de proposer un aperçu des principales méthodes d'optimisation topologiques exposées précédemment, qui se veut pédagogique. Ces méthodes sont appliquées à la conception du noyau d'un transformateur. Il s'agit de maximiser le flux magnétique produit par un enroulement primaire capté par un enroulement secondaire. On considère des matériaux magnétiques linéaires et non-linéaires. Les implémentations Python sont fournies en open-source [1].

2. MODÈLE MATHÉMATIQUE

2.1. Cas général

On définit l'état physique d'un système paramétré S comme la solution d'une équation d'état supposée dérivable

$$S(X, u) = 0, \quad (1)$$

avec u l'état physique et X la variable qui encode la distribution de matière à optimiser. L'égalité (1) définit une relation implicite entre u et X , qu'on notera $u(X)$. Fixer X pour trouver u est un **problème direct**, bien posé mais parfois coûteux en temps de calcul. À l'inverse, fixer u et déterminer $X(u)$ constitue un **problème inverse**, difficile à résoudre car généralement mal posé (non-unicité ou non-existence de solutions). Dans le cas d'un problème d'optimisation mono-objectif et mono-contraainte, X est la grandeur d'intérêt que l'on souhaite déterminer pour minimiser un certain objectif $f(X, u(X))$, tout en respectant une contrainte d'inégalité $g(X)$. Il s'agit donc d'un problème inverse avec les difficultés qui l'accompagnent : sa résolution nécessite des algorithmes itératifs, voire des régularisations. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \text{Trouver} & X_{\text{opt}} = \arg \min_X f(X, u(X)) \\ \text{Sous contrainte} & g(X) \leq 0 \end{array} \quad (2)$$

Pour l'instant, rien ne dit que ce problème soit bien posé, ni qu'il admette une solution (ce n'est pas le cas en général). Par ailleurs, la définition de X , soit la formulation mathématique de la "répartition de matière" est propre à chaque méthode d'optimisation topologique, qui sont recensées en Section 3.

Décrire finement une répartition de matière requiert une grande quantité d'information. X est donc de grande dimension, typiquement $\dim(X) > 10^3$ jusqu'à 10^9 [15]. Il est donc judicieux d'utiliser des algorithmes rapides type **descente de gradient** qui nécessitent le calcul efficace des dérivées $d_X f$ et $d_X g$. Généralement, f et g s'expriment en fonction de l'état physique $u(X)$, implicitement défini par (1) : on ne peut donc pas calculer analytiquement $d_X u$. Comme $\dim(X)$ est très grand et que l'évaluation de $u(X)$ est coûteuse, l'utilisation de la méthode des différences finies est à proscrire. Il est en effet possible de calculer ces dérivées, en ne résolvant qu'un seul problème auxiliaire dit "adjoint", qui est toujours **linéaire** [14]. Cette méthode peut s'écrire comme la dérivation d'un Lagrangien [16], ou par application formelle de la règle de la chaîne :

$$d_X f = \partial_X f + \underbrace{\partial_u f}_{\text{inconnu}} d_X u, \quad (3)$$

Le terme $d_X u$ est une dérivée totale qui n'est pas directement calculable contrairement à $\partial_X f$, dérivée partielle obtenue par dérivation analytique de l'expression de f par rapport à X à u fixé. On peut aussi calculer $\partial_u S(X, u)$, ce qui permet d'écrire

$$d_X f = \partial_X f + \underbrace{\partial_u f [\partial_u S(X, u)]^{-1}}_A \underbrace{\partial_u S(X, u) d_X u}_B. \quad (4)$$

Le terme A s'obtient par résolution du **problème adjoint** :

$$(\partial_u S(X, u))^* \lambda = \partial_u f(u), \quad (5)$$

avec λ l'état adjoint, et $*$ l'opérateur adjoint (transposition) : en effet, dans (4), $\partial_u f$ est appliquée à gauche de l'opérateur et pas à droite. Le terme B s'obtient en dérivant (1) par rapport à X :

$$\begin{aligned} d_X S(X, u) &= \partial_X S(X, u) + \partial_u S(X, u) d_X u = 0 \\ \Rightarrow \partial_u S(X, u) d_X u &= -\partial_X S(X, u). \end{aligned} \quad (6)$$

La méthode de l'adjoint comporte alors trois étapes :

1. Calcul de l'état **physique** u par la résolution de (1), qui est parfois coûteuse en cas de **non-linéarité**.
2. Calcul de l'état **adjoint** λ par la résolution de (5), toujours **linéaire** et rapide à résoudre.
3. Calcul des dérivées par rapport à X :

$$d_X f(X, u) = \partial_X f(X, u) - \lambda \partial_X S(X, u). \quad (7)$$

Le point 3 dépend de la nature de X (vecteur, champ, forme...), et est détaillé pour chaque méthode dans la Section 3.

2.2. Application au transformateur

On s'intéresse à la conception du noyau d'un transformateur. On en considère une coupe longitudinale afin de conserver un problème 2D. Les problèmes 3D sont encore très peu traités dans la littérature, et font l'objet de travaux récents [17]. On note le domaine de calcul Ω , sa frontière $\partial\Omega$, et on fixe la position des enroulements primaires $\{P_+, P_-\}$ et secondaires $\{S_+, S_-\}$, les indices $+$, $-$ donnant le signe conventionnel de la densité de courant j générant un flux positif. La bobine P est alimentée, et la bobine S est à vide. On considère le domaine de conception $\Omega_c = \Omega \setminus (P_+ \cup P_- \cup S_+ \cup S_-)$ représenté sur la Figure 2.

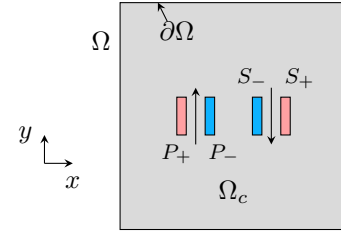


FIG. 2. Domaine de design.

Le rôle du noyau est de canaliser le flux magnétique du circuit primaire vers les enroulements secondaires. L'équation d'état (1) peut s'écrire sous forme variationnelle [18], par multiplication par une fonction test v et intégration sur Ω . Dans le cadre de la formulation primale (b -conforme), on veut trouver $u \in H_0^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$, telle que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \langle S(u), v \rangle = \int_{\Omega} \tilde{\nabla} v \cdot \nu \tilde{\nabla} u - \int_{\Omega} v j = 0, \quad (8)$$

avec $\tilde{\nabla} = R(-\pi/2)\nabla$ l'opérateur rotationnel qui s'identifie en 2D au gradient auquel on a appliqué une rotation de -90° ¹, u la composante du potentiel vecteur magnétique orthogonale au plan de modélisation et ν la réluctivité magnétique. Dans l'air et le cuivre, $\nu = \nu_0 = 1/\mu_0$ et dans le fer ν peut dépendre de la norme de l'induction $b = \tilde{\nabla} u$; dans le cas linéaire $\nu = \nu_r \nu_0$ avec $\nu_r = 10^{-3}$. Les crochets de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ représentent un produit scalaire et dissocient le champ primal u (sur lequel s'applique la fonctionnelle) et le champ dual v . L'équation variationnelle (8) peut se discrétiser par la méthode des éléments finis, par exemple avec la toolbox NGSolve [19].

La fonction objectif à minimiser s'écrit $f(u(X))$, avec f proportionnel au flux capté par les enroulements secondaires selon la direction $(0, 1)$:

$$f(u) = \int_{S_-} u - \int_{S_+} u. \quad (9)$$

Pour éviter une utilisation excessive de matériau ferromagnétique, on limite son volume $V_f(X)$ à $V_{\max} = 10\%$. Pour définir

1. Comme $R(-\pi/2)^T \nu R(-\pi/2) = \nu I_d$, dans le cas isotrope (ν scalaire) on peut donc remplacer $\tilde{\nabla}$ par ∇ et retrouver l'expression donnée dans [18].

clairement $V_f(X)$ il faut définir X : c'est ce que nous ferons dans la Section 3, qui donne les principes des grandes familles d'optimisation topologique.

Le problème adjoint, qui sert à calculer efficacement les sensibilités, est commun à toutes les méthodes. Pour l'établir, il faut calculer $\partial_u f$, qui n'est pas si triviale car u n'est pas un scalaire mais une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$. On utilise donc la notion de dérivée directionnelle². Soit $u^* : \Omega_c \rightarrow \mathbb{R}$ un champ quelconque de la même nature que u , la dérivée directionnelle d'une fonctionnelle $\mathcal{J}$ en u dans la direction u^* s'écrit

$$\langle d_u \mathcal{J}(u), u^* \rangle := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(u + tu^*) - \mathcal{J}(u)}{t}, \quad (10)$$

avec t un réel positif. Appliquée à la dérivée partielle de la fonctionnelle f , on trouve (nous invitons le lecteur à faire le calcul)

$$\langle \partial_u f(u), u^* \rangle = \int_{S_-} 1u^* - \int_{S_+} 1u^*. \quad (11)$$

On peut identifier le champ de sensibilité comme le champ dual de u^* (à gauche dans les crochets de dualité)

$$\partial_u f(u) = \chi_{S_-} - \chi_{S_+}, \quad (12)$$

avec χ_ω la fonction caractéristique qui vaut 1 sur $\omega \subset \Omega$ et 0 ailleurs. En effet, augmenter u sur S_- et diminuer u sur S_+ permet d'augmenter le flux. De la même façon, on dérive ensuite (8), et on trouve dans le cas linéaire

$$\langle \partial_u S(u)u^*, v \rangle = \langle \partial_u S(u)v, u^* \rangle = \int_{\Omega} \tilde{\nabla} v \cdot \nu \tilde{\nabla} u^*. \quad (13)$$

Pour le cas non-linéaire isotrope où ν dépend de $|\tilde{\nabla} u|$ (comme dans le cas d'une saturation magnétique), l'opérateur tangent s'écrit :

$$\langle \partial_u S(u)u^*, v \rangle = \int_{\Omega} \tilde{\nabla} v \cdot \left(\nu(|\tilde{\nabla} u|)I_d + \frac{d\nu}{db} \frac{\tilde{\nabla} u \otimes \tilde{\nabla} u}{|\tilde{\nabla} u|} \right) \tilde{\nabla} u^*. \quad (14)$$

où $\otimes$ désigne le produit dyadique (matrice des produits termes à termes). Résoudre le problème adjoint consiste alors à trouver $\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\forall u^* \in H_0^1(\Omega), \quad \langle [\partial_u S(u)]^* \lambda, u^* \rangle = \langle \partial_u f(u), u^* \rangle$$

$$i.e. \quad \forall u^* \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \nu \nabla u^* = \int_{S_-} u^* - \int_{S_+} u^*. \quad (15)$$

3. MÉTHODES D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE

Dans ce qui suit, on suppose que les matériaux à répartir sont de l'air et du matériau ferromagnétique.

3.1. Méthodes à densité (SIMP)

Les méthodes à densité [2] sont les plus populaires du fait de leur relative simplicité d'implémentation et leur polyvalence. La variable d'optimisation X qui décrit la répartition de matière est un champ de "densité" de fer, noté dans ce contexte $\rho : \Omega_d \rightarrow \mathbb{R}$. On a alors $\rho(x) = 0$ si le matériau au point $x \in \Omega_d$ est de l'air, et $\rho(x) = 1$ si le matériau est du fer. La densité permet d'interpoler les propriétés matériaux, par exemple ν sur $[0, 1]$:

$$\nu(\rho) = \nu_0 + (\nu_1 - \nu_0)\mathcal{I}(\rho), \quad (16)$$

2. On a en fait besoin d'une notion de dérivabilité "de Fréchet" plus forte pour appliquer la règle de la chaîne. Cependant, lorsque la différentielle de Fréchet existe, elle est égale à celle trouvée par dérivée directionnelle. Son existence ne posant généralement pas de problème, on ne développera pas plus ce point.

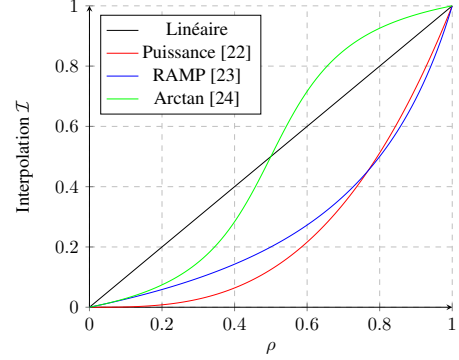


FIG. 3. Différentes interpolations de la littérature des méthodes à densité.

avec $\mathcal{I}$ une fonction d'interpolation dérivable, telle que $\mathcal{I}(0) = 0$ et $\mathcal{I}(1) = 1$ (des exemples sont donnés Figure 3).

$\mathcal{I}$ est différentiable, ce qui permet de calculer les sensibilités par rapport à ρ et d'appliquer des méthodes de descente de gradient. Si les matériaux candidats sont **isotropes**, alors les **matériaux intermédiaires** définis pour $0 < \rho < 1$ le seront aussi, ce qui justifie leur appellation "Solid Isotropic Material with Penalization" (SIMP). Ces matériaux intermédiaires sont non-physique et doivent donc être éliminés dans le processus d'optimisation. Pour ce faire, on peut les **pénaliser**, ce qui conduit à une vaste zoologie de fonctions d'interpolations [20] dont une fraction est représentée sur la Figure 3. Malheureusement, pénaliser les matériaux intermédiaires rend obligatoirement non-convexe le problème (qui ne l'était pas forcément au départ). Pour éviter des artefacts de type "damier", on utilise des procédés de filtrage pour augmenter la régularité de ρ . Ces filtres peuvent être convolutifs, basés sur la résolution d'une équation de diffusion (dite "de Helmholtz" [21]), voire plus élaborés [?], et sont appliqués aussi bien au champ de densité qu'à ses sensibilités. L'équation d'état (8) fait désormais intervenir ρ et on note donc $S(\rho, u)$. L'état magnétique u et l'état adjoint λ sont calculés par résolutions de (8) et (15), respectivement. En posant γ un champ quelconque de la même nature que ρ , on applique ensuite la formule (7) pour trouver $\lambda \partial_\rho S(\rho, u)$ au sens de la dérivée directionnelle

$$\langle d_\rho f(\rho), \gamma \rangle = -\langle \lambda \partial_\rho S(\rho, u), \gamma \rangle = -\int_{\Omega_c} \left(\nabla \lambda \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \nabla u \right) \gamma, \quad (17)$$

et on identifie le champ de sensibilité dans Ω_c tout entier :

$$d_\rho f(\rho) = -\nabla \lambda \cdot \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \nabla u. \quad (18)$$

On remarque que $d = -d_\rho f(\rho)$ correspond à une direction de descente, c'est-à-dire

$$\exists t > 0, \quad f(\rho + td_\rho f(\rho)) < f(\rho), \quad (19)$$

et on peut donc directement l'utiliser dans un algorithme de descente. Pour le volume normalisé, on trouve

$$V_f(\rho) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_c} \rho, \quad \text{et} \quad \langle d_\rho V_f(\rho), \gamma \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_c} 1\gamma, \quad (20)$$

et on identifie le champ de sensibilité $d_\rho V_f(\rho) : \Omega_c \rightarrow \mathbb{R}$ comme le champ constant $\frac{1}{|\Omega|}$ sur Ω_c . Le maillage étant fixe, l'étape de mise à jour se fait en suivant des algorithmes d'optimisation sous contraintes classiques [25] : Lagrangien augmenté, "optimality criteria" [26], méthode des asymptotes mobiles [27], etc. L'algorithme 1 décrit les étapes typiques d'une optimisation à densité.

Algorithme 1 Optimisation à densité

```

 $\rho \leftarrow \rho_0$ 
tant que condition d'arrêt non respectée faire
   $u \leftarrow$  Résolution de l'équation d'état (8)
   $\lambda \leftarrow$  Résolution du problème adjoint (15)
   $(d_\rho f, d_\rho V_f) \leftarrow$  Calcul des sensibilités (18)
   $d_\rho f \leftarrow$  Filtrage et preconditionnement éventuels de  $d_\rho f$ 
   $\rho \leftarrow$  Mise à jour à partir de  $\rho, d_\rho f, d_\rho V_f$  (MMA [27], OC [26], Lagrangien augmenté, pénalisation...)
   $\rho \leftarrow$  Filtrage éventuel de  $\rho$ 
fin tant que
 $\rho \leftarrow$  Post-processing éventuel
  
```

3.2. Homogénéisation

Les méthodes basées sur l'homogénéisation visent à inclure les matériaux intermédiaires dans l'optimisation en leur donnant une signification physique. Historiquement, il s'agit des premières méthodes d'optimisation topologique [28]. On choisit une microstructure initiale qu'on paramétrise (par exemple, un laminé d'ordre 1, comme sur la Figure 4). On cherche ensuite la distribution optimale de ces paramètres dans Ω_c [29]. Ces microstructures intermédiaires sont généralement anisotropes. Les problèmes sont généralement bien posés, même si des difficultés à caractériser les microstructures optimales subsistent [30]. Cette méthode retrouve un essor aujourd'hui avec la fabrication additive, et les récentes techniques de dé-homogénéisation capables de reconstruire un design fabricable à partir des informations de micro-structures [31]. Il apparaît qu'il existe plusieurs bornes supérieures sur les performances maximales des structures optimisées :

- une borne théorique ultime, faisant intervenir les microstructures optimales en chaque point, comportant éventuellement des singularités dans leur paramétrisation ;
- une borne approchable, sans ces singularités ; mais toujours avec des microstructures infiniment fines ;
- une borne atteignable, qui fixant une taille minimale aux microstructures. Cette borne peut évoluer avec l'amélioration des procédés de fabrication.

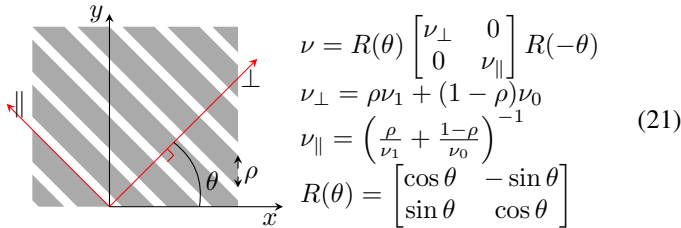


FIG. 4. Exemple de microstructure paramétrée (laminé d'ordre 1), et tenseur de réductivité homogénéisé ν^* avec composantes série $\nu_\perp$ et parallèle $\nu_\parallel$.

L'implémentation d'une d'optimisation topologique par homogénéisation est proche de celle d'une méthode à densité ; la seule différence porte sur le nombre et la nature des paramètres d'optimisation. Dans le cas d'un laminé d'ordre 1 comme à la Figure 4, on doit gérer un champ d'angle θ en plus du champ de densité ρ . Les nouvelles valeurs de sensibilités s'écrivent

$$\begin{cases} d_\rho f(\rho) = -\nabla \lambda \cdot \frac{\partial \nu^*}{\partial \rho} \nabla u \\ d_\theta f(\rho) = -\nabla \lambda \cdot \frac{\partial \nu^*}{\partial \theta} \nabla u. \end{cases} \quad (22)$$

L'angle θ peut être optimisé indépendamment à chaque étape d'optimisation (parfois même analytiquement [32]), ou alors conjointement avec la densité. On peut alors utiliser un algorithme similaire à l'Algorithme 1, sans pénalisation des matériaux intermédiaires, voir sans filtrage. Notons que la prise en

compte de non-linéarités au niveau de la microstructure n'est pas triviale ; on peut utiliser des modèles approchés [33].

3.3. BESO

Les matériaux intermédiaires sont rarement souhaitables en génie électrique. Les approches discrètes à sensibilité (ESO [34], BESO [35], aussi regroupées sous le terme générique dites "ON-OFF") peuvent être vues comme des méthodes à densité où seules les valeurs $\rho = 0$ et $\rho = 1$ sont utilisées. Originellement unidirectionnelles (on retire la matière là où elle est inutile), les approches bi-directionnelles (on peut retirer et rajouter de la matière) sont désormais préférées [6]. On utilise les mêmes sensibilités (18) que pour les méthodes à densité (avec $\rho = 0$ ou $\rho = 1$). L'étape de mise à jour consiste alors à choisir quels éléments faire passer d'un état à l'autre. La méthode utilisée dans cet article est donnée dans l'Algorithme 2 ci-dessous.

Algorithme 2 Mise à jour de l'algorithme ON/OFF

```

 $\epsilon \leftarrow V_0 - V_f(\rho)$  {Erreur à la "consigne" de volume}
 $\epsilon_i \leftarrow \min \left( \max \left( -\frac{K_p \epsilon}{K_i}, \epsilon_i + \epsilon \right), \frac{1-K_p \epsilon}{K_i} \right)$  {Intégration avec anti-windup}
 $V_i \leftarrow K_p \epsilon + K_i \epsilon_i$  {Analogie avec un correcteur PI}
 $d_\rho f \leftarrow$  Tri de  $d_\rho f$  dans l'ordre croissant.
 $\rho \leftarrow$  ordonnancement de  $\rho$  dans le même ordre que  $d_\rho f$ 
 $v : n = \int_0^n \rho_n T_n$  avec  $T_n$  le volume de l'élément  $n$ 
 $N \leftarrow \arg \min(|v(n) - V_i|)$ 
 $\rho_{n \leq N} \leftarrow 1$ 
 $\rho_{n > N} \leftarrow 0$ 
  
```

3.4. Level-set

La variable d'optimisation X de la méthode level-set (ou méthode de lignes de niveau) est $\varphi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, qu'on cherche proche d'une fonction "distance signée" par rapport à l'interface entre les matériaux à distribuer [12, 36] :

$$\varphi : \begin{cases} \varphi(x) < 0 & x \in \Omega_f \quad (\text{fer}) \\ \varphi(x) > 0 & x \in \Omega_a \quad (\text{air}) \\ \varphi(x) = 0 & x \in \Gamma \quad (\text{interface}) \end{cases} \quad (23)$$

Elle permet d'obtenir une interface nette illustrée sur la Figure 5, en deçà de la résolution du maillage, tout en gardant une variable d'optimisation continue adaptée aux algorithmes à gradient. Cet avantage s'accompagne de deux difficultés. La première est d'identifier Ω_f défini implicitement par $\Gamma = \{x \in \Omega_c, \varphi(x) = 0\}$, qui n'est par défaut pas conforme au maillage. Si des approches non-conformes présentant une interface diffuse ont d'abord été préférées pour leur facilité d'implémentation [37], de plus en plus de travaux utilisent des algorithmes de remaillage [38] ou des méthodes XFEM [39] permettant de capturer finement les effets des interfaces.

La seconde difficulté concerne le calcul de la sensibilité par rapport à Γ , qui est une dérivée de forme [8] (par rapport à la variation de la position des frontières) ou topologique [9] (par rapport à l'introduction d'une inclusion infinitésimale). On traite dans cet article la dérivée de forme uniquement, qui nécessite les outils du calcul variationnel comme la méthode de Hadamard [40]. Notons que les méthodes level-set à dérivée de forme sont tout de même classifiées dans les méthodes d'optimisation topologique, car elles autorisent la fusion et séparation de matière.

Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ perturbé par un champ de "vitesse" V , la dérivée de forme $\mathcal{D}f$ d'une fonctionnelle $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ suffisamment régulière s'écrit selon normale n sortante à Ω_f :

$$\mathcal{D}f(V) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\Omega + tV) - f(\Omega)}{t} = \int_{\Gamma} gV \cdot n, \quad g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \quad (24)$$

Afin d'identifier un champ de vitesse $\mathcal{V}$ qui constitue une direction de descente, on résout une équation de régularisation elliptique [41]. Son choix étant assez libre, on considère ici

$$\int_{\Omega} h^2 \nabla \mathcal{W} \cdot \nabla \mathcal{V} + \mathcal{V} \cdot \mathcal{W} = -\mathcal{D}f(\mathcal{W}), \quad \forall \mathcal{W} \in (H^1(\Omega))^2, \quad (25)$$

avec h un paramètre de diffusion représentatif de la taille locale du maillage. Pour le cas test du transformateur, la dérivée de forme de la fonction objectif est l'application directe de [40]

$$\mathcal{D}f(V) = \int_{\Gamma} (\nu_r - 1) (\nu \partial_n u \partial_n p + \nu_0 \nabla_T u \cdot \nabla_T p) V \cdot n \quad (26)$$

avec le gradient normal $\partial_n u := \nabla u \cdot n$, et le gradient tangentiel $\nabla_T u = \nabla u - \partial_n u \cdot n$. Similairement, pour la contrainte de volume normalisé :

$$\mathcal{D}V_f(V) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Gamma} V \cdot n. \quad (27)$$

Cette formule confirme bien l'intuition : "pour augmenter le volume d'un objet, il suffit de déplacer sa frontière selon la normale sortante". Les sensibilités obtenues sont alors fournies à un algorithme d'optimisation [42, 43]. La mise à jour de φ nécessite la résolution d'une équation de transport, instable avec des éléments finis P1 [44] :

$$\varphi^{(k+1)}(x, \tau) := \begin{cases} \partial_{\tau} \varphi(x, \tau) + \mathcal{V}(x) \cdot \nabla \varphi(x, \tau) = 0, \tau \in [0, T] \\ \varphi^{(k+1)}(x, \tau = 0) = \varphi^{(k)}(x) \end{cases} \quad (28)$$

Le pseudo-temps final d'advection T , $\varphi^{k+1} = \varphi(T)$ est choisi de telle sorte que la frontière ne se déplace qu'au plus de quelques éléments de maillage. Le principe de l'advection est illustré sur la figure 5.

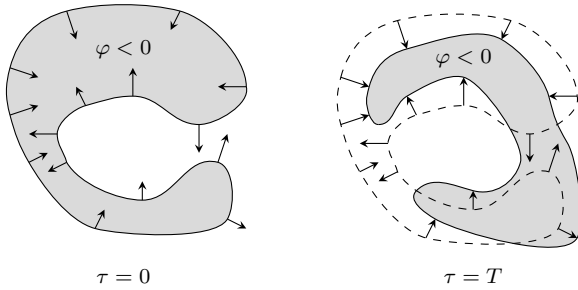


FIG. 5. Mise à jour d'une forme définie par level-set, avec fusion et séparation de matière. Les flèches représentent un champ de vitesse $\mathcal{V}$ constituant une direction de descente.

Algorithme 3 Optimisation par level-set

$\varphi \leftarrow \varphi_0$ Initialisation avec une fonction distance signée
tant que condition d'arrêt non respectée **faire**
 $\Gamma \leftarrow$ Frontière interpolée [37] ou remaillée [12, 38]
 $u, \lambda \leftarrow$ Calculs de l'état par (8) et de l'adjoint par (15)
 $\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_{V_f} \leftarrow$ Calculs de directions de descente par (25), en utilisant les dérivées de formes (26) et (27)
 $\varphi \leftarrow$ Advection par (28) à partir de $\mathcal{V}_f, \mathcal{V}_{V_f}$, sous le contrôle d'algorithmes d'optimisation (Lagrangien augmenté [25], NullSpace [42], etc.)
 $\varphi \leftarrow$ Régularisation par redistanciation [40]
fin tant que

4. COMPARATIF DES MÉTHODES

Ces méthodes ont été implémentées avec NGSolve [19]. Les résultats finaux (fer linéaire) sont représentés à la Figure 6 et leurs performances sont données dans le Tableau 1. Les codes associés sont disponibles dans le dossier SGE2025 [1]. Ces méthodes convergent en général rapidement; le nombre d'appels au solveur est donné dépend de l'algorithme d'optimisation dont on a privilégié la simplicité sur la performance. Pour les méthodes à densité, l'interpolation linéaire de μ (Figure 6a) est stable, conduit à de bonnes performances mais contient des matériaux intermédiaires. L'homogénéisation (Figure 6e) les interprète comme des microstructures laminées en parallèle du flux. On peut aussi les éliminer en interpolant ν (Figure 6b). La méthode BESO (Figure 6d) s'en passe totalement, mais fait apparaître les irrégularités du maillage. Ce n'est plus le cas de la méthode level-set (Figure 6c) qui permet d'accéder à une résolution inférieure à la taille de maille. Les meilleures performances sont obtenues avec une fenêtre de bobinage réduite (colonne de gauche), ce qui augmente la section du noyau. Même pour un problème aussi simple, toutes les méthodes ne conduisent pas au même résultat. On donne également la structure obtenue par un algorithme génétique (Figure 6f), qui n'est pas compétitive.

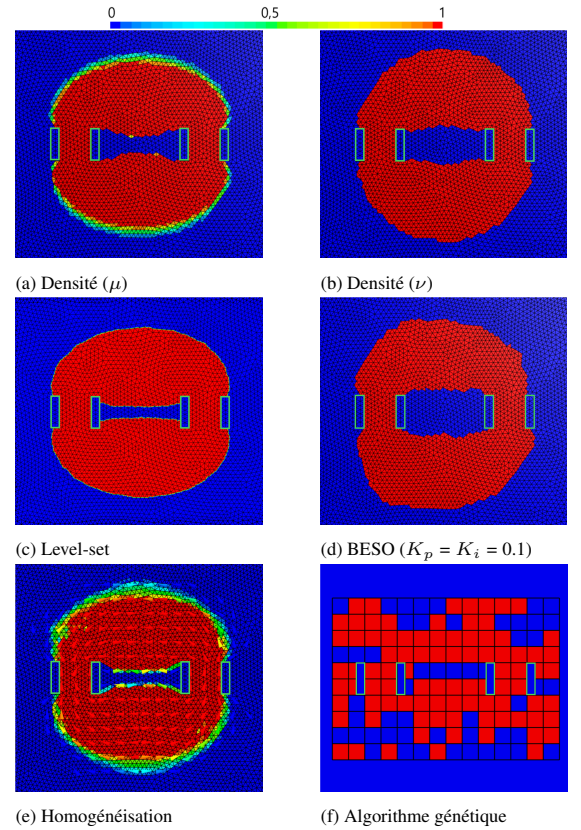


FIG. 6. Résultats d'optimisation (l'échelle de couleur représente la densité, les flèches représentent l'axe $\parallel$ des microstructures laminées de la Figure 4).

TABLEAU 1. Flux et volumes des structures optimisées

Méthode	Flux (Wb/m)	Volume (%)	Appels solveur
Densité (μ)	2.735×10^{-5}	10.001	250
Densité (ν)	2.690×10^{-5}	10.159	40
Level-set	2.678×10^{-5}	9.998	184
BESO	2.549×10^{-5}	9.993	71
Homogénéisation	2.754×10^{-5}	9.993	1000
Algo. génétique	1.594×10^{-5}	9.654	412500

5. CONCLUSION

Les méthodes d'optimisation topologique à gradient les plus utilisées ont été passées en revue et implémentées. Les résultats montrent que lorsque le nombre de variables d'optimisation est important, l'utilisation d'algorithmes basés sur le calcul des sensibilités est recommandée. Les codes sont fournis [1] et seront progressivement enrichis et améliorés ; on y trouvera notamment les implémentations non-linéaires.

On remarque que même pour un problème aussi simple, les méthodes peuvent converger vers des résultats différents, ce qui souligne l'importance d'un benchmark commun pour les comparer. D'autres cas tests seront considérés dans de futurs travaux : on peut par exemple inverser la direction du flux à maximiser, ou encore considérer une inductance avec entrefer.

6. RÉFÉRENCES

- [1] T. Cherrière, T. Gauthey, and S. Gaydier, "sge2025_topopt," 2025. <https://zenodo.org/doi/10.5281/zenodo.1542224>.
- [2] D. N. Dyck and D. A. Lowther, "Automated design of magnetic devices by optimizing material distribution," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, no. 3 PART 2, pp. 1188–1192, 1996.
- [3] S. Dufour, G. Vinsard, and B. Laporte, "Generating rotor geometries by using a genetic method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 4 PART 1, pp. 1035–1038, 2000.
- [4] Z. Ahmad, A. Kallaste, T. Vaimann, M. U. Naseer, S. Hussain, and A. Rasolkina, "Review of Design Freedom Offered by Additive Manufacturing for Performance Enhancement of Electrical Machine," 2024.
- [5] J. Yoo, N. Kikuchi, and J. L. Volakis, "Structural optimization in magnetic devices by the homogenization design method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 36, no. 3, pp. 574–580, 2000.
- [6] M. Hage-Hassan, M. Zaid, A. Silvestrini, A. Ospina, N.-E. Fenineche, and G. Krebs, "Multi-material beso topology optimization for synrm based on printed fesi6.5%," in *COMPUMAG 2023*, (Kyoto, Japon), 2023.
- [7] O. Brun, O. Chadebec, P. Ferrouillat, I. Niyonzima, Z. Luo, Y. Le Floch, J. Siau, F. Vi, and L. Gerbaud, "A level-set-based topology optimization for maximizing the torque of synchronous reluctance machines," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 60, no. 3, pp. 1–4, 2024.
- [8] P. Gangl, U. Langer, A. Laurain, H. Meftahi, and K. Sturm, "Shape optimization of an electric motor subject to nonlinear magnetostatics," *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 37, no. 6, pp. B1002–B1025, 2015.
- [9] P. Gangl, S. Amstutz, and U. Langer, "Topology Optimization of Electric Motor Using Topological Derivative for Nonlinear Magnetostatics," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 52, no. 3, pp. 4–7, 2016.
- [10] J. S. Choi, K. Izui, S. Nishiwaki, A. Kawamoto, and T. Nomura, "Topology optimization of the stator for minimizing cogging torque of IPM motors," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, no. 10, pp. 3024–3027, 2011.
- [11] D. Liu and J. Du, "Shape and topology optimization in electrical impedance tomography via moving morphable components method," *Struct. & Multidisc. Optim.*, vol. 64, no. 2, pp. 585–598, 2021.
- [12] E. Kuci, M. Jansen, and O. Coulaud, "Level set topology optimization of synchronous reluctance machines using a body-fitted mesh representation," *Struct. & Multidisc. Optim.*, vol. 64, no. 6, p. 3729–3745, 2021.
- [13] M. Yin, M. Naidjate, N. Bracikowski, A. Pierquin, and D. Trichet, "Topology optimization of non-linear electromagnetic actuator based on reluctance network analysis," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 602, p. 172174, July 2024.
- [14] R. El Bechari, F. Guyomarch, and S. Brisset, "The Adjoint Variable Method for Computational Electromagnetics," *Mathematics*, vol. 10, no. 6, 2022.
- [15] N. Aage, E. Andreassen, B. S. Lazarov, and O. Sigmund, "Giga-voxel computational morphogenesis for structural design," *Nature*, vol. 550, no. 7674, pp. 84–86, 2017.
- [16] J. Cea, "Conception optimale ou identification de formes, calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût," *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, vol. 20, no. 3, pp. 371–402, 1986.
- [17] Z. Houta, F. Messine, and T. Hugué, "Topology optimization for magnetic circuits with continuous adjoint method in 3D," *COMPEL*, vol. 43, no. 2, pp. 370–389, 2024.
- [18] T. Cherrière and T. Gauthey, "Tutoriel optimisation topologique d'un transformateur," 2023. hal-04106150.
- [19] "Netgen/ngsolve," <https://www.ngsolve.org/>.
- [20] S. Sanogo and F. Messine, "Topology optimization in electromagnetism using SIMP method : Issues of material interpolation schemes," *COMPEL*, vol. 37, no. 6, pp. 2138–2157, 2018.
- [21] B. S. Lazarov and O. Sigmund, "Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 86, no. 6, pp. 765–781, 2010.
- [22] M. P. Bendsøe, "Optimal shape design as a material distribution problem," *Structural Optimization*, vol. 1, no. 4, pp. 193–202, 1989.
- [23] M. Stolpe and K. Svanberg, "An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization," *Struct. & Multidisc. Optim.*, vol. 22, no. 2, pp. 116–124, 2001.
- [24] D. Lukáš, "An Integration of Optimal Topology and Shape Design for Magnetostatics," *Scientific Computing in Electrical Engineering*, pp. 227–232, 2006.
- [25] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical optimization*. Springer, 2006.
- [26] M. P. Bendsøe, *Optimization of Structural Topology, Shape, and Material*. Springer, 1995.
- [27] K. Svanberg, "The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, no. 2, pp. 359–373, 1987.
- [28] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, p. 197–224, Nov. 1988.
- [29] J. Lee, J. Yoo, S. Min, and M. Yoon, "Topology optimization of anisotropic magnetic composites in actuators using homogenization design method," *Struct. & Multidisc. Optim.*, vol. 60, no. 4, pp. 1423–1436, 2019.
- [30] G. Allaire, *Shape optimization by the homogenization method*, vol. 76. Numerische Mathematik, 1997.
- [31] J. Wu, O. Sigmund, and J. P. Groen, "Topology optimization of multi-scale structures : a review," *Struct. & Multidisc. Optim.*, vol. 63, no. 3, pp. 1455–1480, 2021.
- [32] P. Pedersen, "On optimal orientation of orthotropic materials," *Structural Optimization*, vol. 1, no. 2, pp. 101–106, 1989.
- [33] T. Labbé, E. Matagne, and B. Dehez, "Topology optimization of electromagnetic devices using oriented iron microstructures," *COMPEL*, vol. 31, no. 5, pp. 1408–1416, 2012.
- [34] Y. Xie and G. Steven, "A simple approach to Structural Optimization," *Computers and Structures*, vol. 49, no. 5, pp. 885–896, 1993.
- [35] O. Querin, G. Steven, and Y. Xie, "Evolutionary structural optimisation (eso) using a bidirectional algorithm," *Engineering Computations*, vol. 15, p. 1031–1048, Dec. 1998.
- [36] S. I. Park and S. Min, "Design of magnetic actuator with nonlinear ferromagnetic materials using level-set based topology optimization," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 46, no. 2, pp. 618–621, 2010.
- [37] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader, *Structural Optimization by the Level-Set Method*, p. 1–15. Birkhäuser Basel, 2003.
- [38] C. Dapogny and F. Feppon, "Shape optimization using a level set based mesh evolution method : an overview and tutorial," *Comptes Rendus. Mathématique*, vol. 361, pp. 1267–1332, 2023.
- [39] C. H. Villanueva and K. Maute, "Density and level set-xfem schemes for topology optimization of 3-d structures," *Computational Mechanics*, vol. 54, p. 133–150, Apr. 2014.
- [40] G. Allaire, C. Dapogny, and F. Jouve, *Shape and topology optimization*, p. 1–132. Elsevier, 2021.
- [41] P. Gangl, K. Sturm, M. Neunteufel, and J. Schöberl, "Fully and semi-automated shape differentiation in ngsolve," *Struct. & Multidisc. Optim.*, vol. 63, p. 1579–1607, Nov. 2020.
- [42] Feppon, F., Allaire, G., and Dapogny, C., "Null space gradient flows for constrained optimization with applications to shape optimization," *ESAIM : COCV*, vol. 26, p. 90, 2020.
- [43] J. Nocedal and S. J. Wright, "Penalty, Barrier, and Augmented Lagrangian Methods," in *Numerical Optimization*, pp. 488–525, New York, NY : Springer New York, 1999.
- [44] J. A. Sethian *et al.*, *Level set methods and fast marching methods*, vol. 98. Cambridge Cambridge UP, 1999.