

Modélisation électromagnétique d'un transformateur planaire incluant les couplages capacitifs

Lucas PNIAK⁽¹⁾, Loic QUEVAL^(2,3), Bertrand REVOL⁽¹⁾, Cyrille GAUTIER⁽¹⁾,

Jean-Sylvio NGOUA TEU MAGAMBO⁽¹⁾, Stéphane NGO BUI HUNG^(1,4), Olivier BETHOUX^(2,3)

(1) Pôle Systèmes Electriques et Electroniques, SafranTech, 75724 Paris, France

(2) Univ. Paris-Saclay, CentraleSupélec, CNRS, Laboratoire de Génie Electrique et Electronique de Paris, Gif-sur-Yvette, France

(3) Sorbonne Université, CNRS, Laboratoire de Génie Electrique et Electronique de Paris, Paris, France

(4) Univ. Paris-Saclay, Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France

RESUME – Face aux nouveaux besoins d'alimentations à découpages isolées à rendement et densité de puissance élevés, la technologie des transformateurs planaires s'est imposée comme une alternative sérieuse aux composants bobinés. La forme plate des spires et l'entrelacement des bobinages permettent une excellente maîtrise des phénomènes d'effet de peau et de proximité. Si la littérature scientifique propose de nombreux outils de simulations pour aider à la conception d'un tel transformateur, force est de constater qu'ils ne permettent pas de rendre compte rigoureusement du phénomène le plus pénalisant de cette technologie, à savoir les effets capacitifs entre spires. Dans ce contexte, cet article propose une méthode et un modèle électromagnétique complet du transformateur planaire, permettant l'estimation rapide de l'ensemble de ses paramètres dimensionnant : pertes, inductance de fuite, bande passante et impédance inter-enroulement.

Mots-clés – Transformateur planaire, modélisation électromagnétique, ligne de transmission, couplages capacitifs, Euler-Lagrange.

1. INTRODUCTION

Grâce à ses nombreux avantages, le transformateur planaire répond aux exigences de l'électronique de puissance moderne, en particulier en termes de fréquences de fonctionnement et de densité de puissance élevées [1, 2, 3]. En effet, lorsqu'il est bien dimensionné, l'entrelacement de ses enroulements permet, sur une très large plage de fréquences de fonctionnement, une répartition homogène de la densité de courant sur la quasi-totalité de la section des spires, et cela, malgré l'effet de peau et les effets de proximité qui nuisent aux performances des autres technologies [4]. Les pertes Joule peuvent ainsi être maintenues à des niveaux acceptables, ce qui n'est pas le cas des composants bobinés classiques de même volume dont les spires sont de section circulaire [1]. Pour cette raison, la technologie planaire est aujourd'hui largement employée dans les convertisseurs à haute fréquence de découpage (100 kHz à 1 MHz).

Elle a cependant un désavantage majeur : les spires en vis-à-vis sont soumises à de forts couplages capacitifs, d'autant plus importants que les enroulements sont entrelacés. Ces couplages doivent absolument être maîtrisés par le concepteur de manière à garantir une bande passante élevée devant la fréquence d'utilisation et une impédance inter-enroulements suffisamment grande pour limiter les perturbations électromagnétiques conduites de mode commun.

Ainsi, pour obtenir un dimensionnement satisfaisant, le concepteur a besoin d'outils de simulation précis et rapides. Les modèles analytiques proposés dans la littérature se limitent souvent à la prise en compte des effets inductifs et résistifs [4, 5, 6]. Les effets capacitifs peuvent être ajoutés à ces modèles de manière comportementale, par des capacités parasites localisées, soit à l'échelle du composant [7, 8], soit à l'échelle de chacune des couches de conducteur. Les valeurs de ces capacités parasites sont classiquement calculées grâce à des hypothèses sur

la répartition des charges dans le bobinage, ou identifiées grâce à des mesures. Les modèles comportementaux qui découlent de ces méthodes permettent l'estimation précise de l'impédance du transformateur en court-circuit et circuit ouvert sur une large bande de fréquence, mais ont deux limitations majeures. Elles peinent à rendre compte des résonances secondaires, à très haute fréquence (≈ 100 MHz), et ne permettent pas de simuler le comportement du composant en mode commun sinon au prix d'un effort important et complexe de modélisation.

Dans cet article, un modèle électromagnétique analytique fréquentiel du transformateur planaire, appelé modèle LT, est proposé. Prenant en compte par construction les phénomènes capacitifs entre spires, il représente une solution innovante et attractive car nécessitant peu de ressources de calcul. L'approche de modélisation adoptée consiste à exploiter les équations de la dynamique d'Euler-Lagrange pour exprimer les équations différentielles vérifiées par les charges circulant dans les spires du transformateur. Des hypothèses fortes sur la géométrie ainsi que la définition d'un conducteur de référence permettent de formuler le problème sous forme linéaire, analogue à une ligne de transmission multiconducteur [10]. Les connexions série/parallèle des spires, ainsi que les sources de tension imposées aux enroulements, sont alors traitées sous la forme de conditions aux limites. La résolution du problème électromagnétique pour les essais classiques de caractérisation du transformateur (court-circuit, circuit ouvert, mode commun) permet l'estimation des paramètres macroscopiques dimensionnantes (pertes Joule, inductance de fuite, bande passante, impédance inter-enroulements...), et cela uniquement à partir des données géométriques du composant et des propriétés de ses matériaux.

Cet article est organisé comme suit. La partie 2 décrit les transformations géométriques simplificatrices, le choix des variables d'état et les équations de la dynamique d'Euler-Lagrange. La partie 3 introduit les hypothèses électromagnétiques considérées dans cette étude et le calcul des paramètres

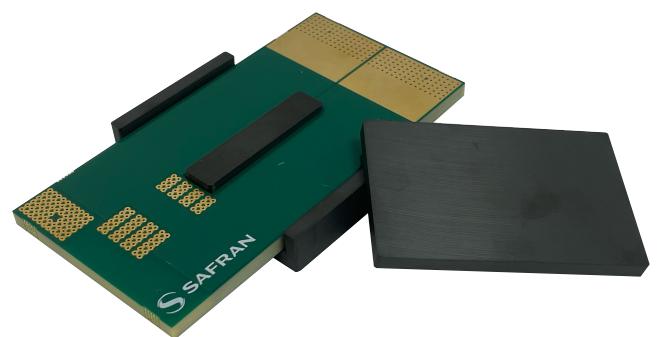


FIG. 1. Photograph of planar transformer with a EI core.

électriques linéaires. La partie 4 présente les équations différentielles vérifiées par les variables d'état, leur résolution et les conditions aux limites à considérer. La partie 5 compare le modèle proposé à des mesures expérimentales en vue de sa validation. Et enfin, la partie 6 conclue cet article.

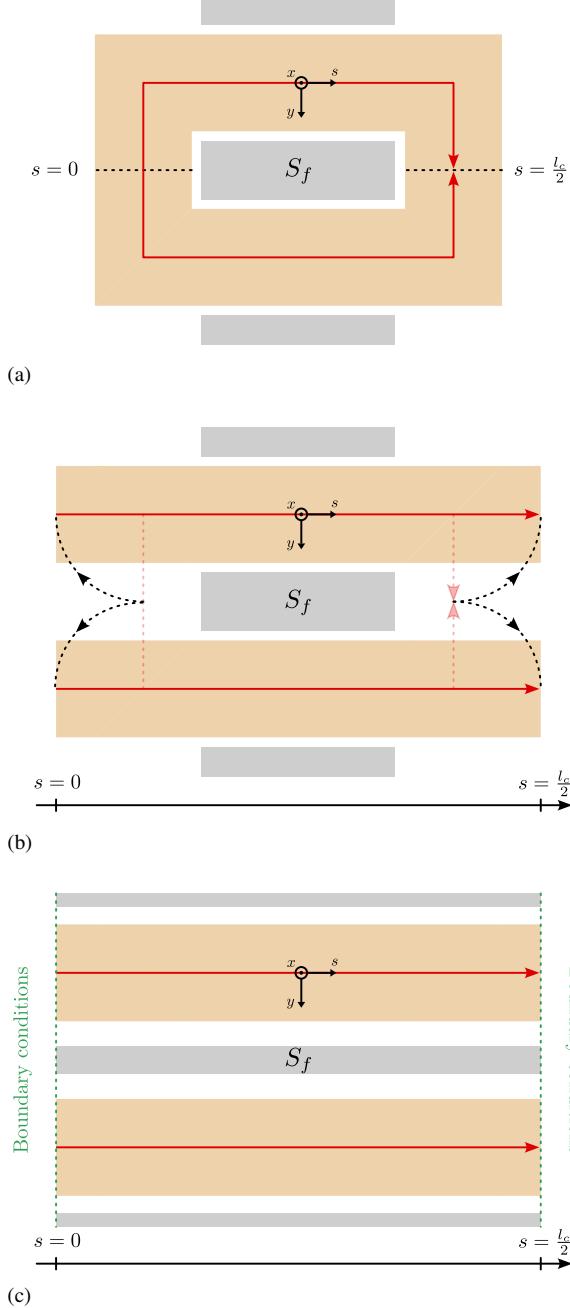


FIG. 2. Représentation du transformateur vu du dessus.

2. ADAPTATION DE LA GÉOMÉTRIE ET ÉQUATION D'EULER-LAGRANGE

2.1. Un avatar du transformateur à la géométrie invariante

Le transformateur planaire est un composant électromagnétique complexe dont les formes géométriques dépendent fortement du noyau magnétique choisi. Les noyaux de type EI sont notamment très utilisés pour les applications à fort courant car ils offrent de larges fenêtres de bobinage; ils présentent également un très bon compromis masse et produit des aires [2]. Une photographie d'un tel transformateur est présentée à la Figure 1. Nous remarquons que ce dernier ne présente que peu

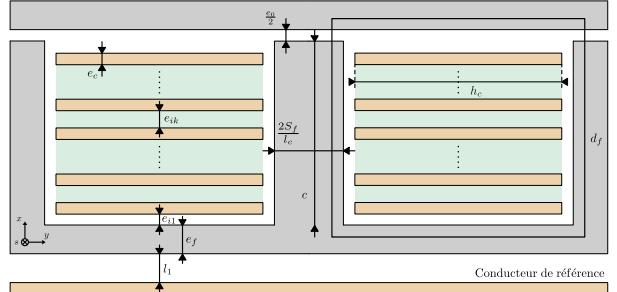


FIG. 3. Vue schématique du transformateur en coupe dans le plan (x,y). Définition des paramètres géométriques.

de symétries géométriques et aucune invariance. De plus, la répartition du matériau magnétique n'est pas du tout uniforme le long du bobinage. En l'état, la modélisation électromagnétique de ce transformateur se fait nécessairement en 3 dimensions et une approche analytique est difficilement envisageable.

Dans cet article, nous proposons d'adapter la géométrie du transformateur de manière à créer artificiellement une invariance selon l'axe curviligne s du bobinage et réduire le problème électromagnétique à 2 dimensions. Sur la Figure 2a est représenté schématiquement le transformateur de la Figure 1 vu du dessus. On définit l'abscisse curviligne s suivant le chemin moyen parcouru par le courant le long des spires. L'origine $s = 0$ de cet abscisse curviligne est placée au niveau de la tête de bobine de gauche, sur l'axe de symétrie horizontal. Une distance $l_c/2$ la sépare de la tête de bobine de droite, où l_c est la longueur moyenne d'une spire. L'uniformisation de la géométrie se fait alors en deux étapes :

1. Comme représenté sur la Figure 2b, on découpe les spires aux abscisses $s = 0$ et $s = l_c/2$ et on redresse les courbures des têtes de bobines de manière à rendre l'axe s rectiligne. La longueur et la largeur des demi-spires est conservée.
2. Nous uniformisons le matériau magnétique sur la longueur totale des demi-spires $l_c/2$ en conservant identique la section totale de matériau magnétique dans le plan (y,s), ainsi que la longueur moyenne d_f du circuit magnétique. Une illustration est proposée Figure 2c. Notez que les connexions des demi-spires entre elles seront traduites par des conditions aux limites électriques sur les courants et tensions aux extrémités de la nouvelle géométrie.

La géométrie de cet avatar virtuel du transformateur planaire est bien invariante selon l'axe s et le problème électromagnétique peut être traité de manière linéaire, dans la vue en coupe dans le plan (x,y) est donné Figure 3. Le paramétrage est réalisé en respectant les contraintes de conservation de la section de matériau magnétique et de la longueur du circuit magnétique.

2.2. Variables d'état et conducteur de référence

Les variables d'état choisies pour étudier la dynamique du transformateur sont la quantité de charges stockées dans chacune des $2N$ demi-spires de la vue en coupe, entre les abscisses 0 et s . Ce choix est adapté puisque la charge est à la frontière entre les phénomènes électriques (elle est liée au champ électrique par Maxwell-Gauss), et magnétiques (sa dérivée temporelle, le courant, est liée au champ magnétique par Maxwell-Ampère). Le problème étant résolu dans le domaine fréquentiel, l'amplitude complexe du vecteur d'état est ici considérée :

$$\underline{q}(s, t) = [q_1(s, t) \dots q_{2N}(s, t)]^T. \quad (1)$$

Un conducteur de référence est défini. Il sert de référence de potentiel du problème électromagnétique, et est un élément permettant le retour de la somme des courants traversant le transformateur, comme cela est représenté sur la Figure 4. Nous avons

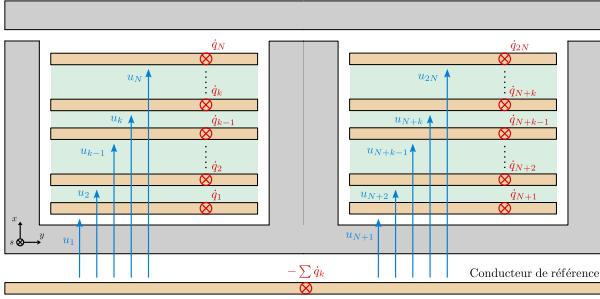


FIG. 4. Vue en coupe du transformateur à géométrie invariante dans le plan (x, y).

choisi arbitrairement un conducteur de référence rectangulaire, placé sous le transformateur, à une distance l_1 . Cette configuration est proche d'un cas d'utilisation réel où ce conducteur de référence serait le plan de masse d'une paillasse (par exemple de certification CEM), ou le boîtier métallique d'un convertisseur (où le dispositif serait embarqué dans un système réel). Il offre également la possibilité de pré-déterminer le comportement en mode commun du transformateur. Sur la Figure 4 sont également définis, à l'abscisse s , les courants $\underline{q}(s, t) = [\dot{q}_1(s, t) \dots \dot{q}_{2N}(s, t)]^T$ circulant dans les $2N$ demi-spires ainsi que les tensions $\underline{u}(s, t) = [u_1(s, t) \dots u_{2N}(s, t)]^T$ entre ces demi-spires et la référence de potentiel.

2.3. Equations de la dynamique

Pour obtenir les équations différentielles régissant la dynamique des charges dans chacune des $2N$ demi-spires, nous utilisons les équations d'Euler-Lagrange pour les systèmes continus, c'est-à-dire les systèmes dont les variables d'état \underline{q}_i dépendent du temps et d'un abscisse spatial s . Elles prennent la forme suivante comme démontré dans [11] :

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{nc}}{\partial \underline{q}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}^{nc}}{\partial \dot{\underline{q}}} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \mathcal{L}^{nc}}{\partial \underline{q}_s} = 0 \quad (2)$$

où $\dot{\underline{q}}$ désigne la dérivée temporelle de la charge, $\underline{q}_s = \partial \underline{q} / \partial s$ la densité linéique de charge, et \mathcal{L}^{nc} est la densité linéique de lagrangien du système. Elle se définit comme suit :

$$\mathcal{L}^{nc}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}_s) = \mathcal{E}_\mu(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) + \int_0^t \mathcal{P}(\dot{\underline{q}}) dt - \mathcal{E}_e(\underline{q}, \underline{q}_s) \quad (3)$$

où \mathcal{E}_μ est la densité linéique d'énergie magnétique, \mathcal{P} la densité linéique de pertes et \mathcal{E}_e la densité linéique d'énergie électrique.

3. PARAMÈTRES ÉLECTRIQUES LINÉIQUES

Lorsque l'on exploite les équations de la dynamique d'Euler-Lagrange, l'enjeu est d'être capable d'exprimer analytiquement \mathcal{E}_μ , \mathcal{P} et \mathcal{E}_e en fonction des variables d'état \underline{q} , et de ses dérivées temporelle $\dot{\underline{q}}$ et spatiale \underline{q}_s . Pour cela, des hypothèses de modélisation classiques sont considérées :

1. Le problème est étudié en régime harmonique permanent.
2. Le problème est Magnéto-Quasi-Statique (MQS) [12]. On suppose donc que les ondes électromagnétiques se propageant dans le transformateur selon l'axe s le font en un temps $l_c/2v = l_c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} / 2$ plus court que le temps d'intérêt $\tau = 1/\omega$, où ω est la pulsation de l'onde. La longueur d'une demie spire d'un transformateur étudié dans cette étude est de 8,8 cm, la permittivité relative des isolants de 4,6 et la fréquence maximale d'étude de 120 MHz; on a bien $l_c/2v = 0,63 \text{ ns} < \tau = 1,3 \text{ ns}$.

L'hypothèse MQS suppose également de négliger les courants de déplacement dans les conducteurs.

3. Les couches conductrices, les couches d'isolation et le matériau magnétique sont considérés comme linéaires, homogènes et isotropes. On écrit comme suit les lois de comportement magnétique de l'air (4), également applicable aux matériaux conducteurs et isolants,

$$\mathbf{B}_{\text{air}} = \mu_0 \mathbf{H}_{\text{air}}, \quad (4)$$

et du matériau magnétique (5),

$$\mathbf{B}_{\text{fer}} = \mu_0 \underline{\mu} \mathbf{H}_{\text{fer}}, \quad (5)$$

où \mathbf{B} et \mathbf{H} sont respectivement les amplitudes complexes de l'induction et du champ magnétique, μ_0 est la perméabilité du vide et $\underline{\mu}$ la perméabilité relative complexe du matériau magnétique telle que :

$$\underline{\mu} = \mu' - j\mu'', \quad (6)$$

Les pertes dans le noyau magnétique sont représentées par la partie imaginaire μ'' de la perméabilité complexe $\underline{\mu}$.

4. La perméabilité relative du noyau magnétique est très grande devant 1. L'intensité du champ magnétique à l'intérieur du circuit magnétique est négligeable par rapport au champ magnétique de fuite dans la fenêtre du bobinage. Le matériau magnétique est supposé isolant électrique, de conductivité nulle et de permittivité relative équivalente ϵ_f .
5. L'entrefer est suffisamment petit ou éloigné des couches conductrices. L'effet de frange est donc négligé.
6. Chaque couche de conducteur est constituée d'une unique spire.
7. La largeur du conducteur est beaucoup plus grande que son épaisseur ou que celle des couches d'isolation électriques. Le champ magnétique est supposé parallèle aux couches conductrices [4, 5, 6, 9], et donc porté par l'axe y . Le champ électrique est supposé perpendiculaire aux couches conductrices, et donc porté par l'axe x .
8. L'effet des bords des conducteurs est négligé. Dans chaque des deux fenêtres, une invariance de la géométrie et des grandeurs électriques le long de l'axe y est supposée localement dans les couches conductrices et isolantes.
9. Les interactions capacitatives entre les conducteurs des deux fenêtres sont négligées. Seul est pris en compte le champ électrique entre les conducteurs d'une même fenêtre de bobinage.

3.1. Densité linéique d'énergie magnétique et de pertes

Ainsi, l'application du théorème d'Ampère sur des contours bien choisis permet le calcul de la densité linéique d'énergie magnétique $\mathcal{E}_\mu(\dot{\underline{q}})$, et de la densité linéique de pertes $\mathcal{P}(\dot{\underline{q}})$. La méthode et les calculs associés sont très similaires au cas purement magnétostatique. On exploite donc ici les résultats publiés dans [4] :

$$\mathcal{E}_\mu(\dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^\dagger L \dot{\underline{q}}, \quad (7)$$

$$\mathcal{P}(\dot{\underline{q}}) = \dot{\underline{q}}^\dagger R \dot{\underline{q}}, \quad (8)$$

Notez que les équations (7) et (8) sont volontairement écrites sous formes de produits matriciels pour obtenir une notation très compacte. Les expressions des matrices inductance L et résistance R de taille $2N \times 2N$, en grande partie issues de [4], sont données en Annexe en fonction des paramètres géométrique et propriétés des matériaux.

3.2. Densité linéique d'énergie électrique

L'application du théorème de Gauss sur des surfaces fermées bien choisies permet le calcul de la densité linéique d'énergie électrique,

$$\mathcal{E}_\epsilon(\underline{q}_s) = \frac{1}{2} \underline{q}_s^\dagger C^{-1} \underline{q}_s, \quad (9)$$

où C est la matrice capacité linéique de taille $2N \times 2N$ dont le calcul et l'expression donnés en Annexe sont une contribution originale de l'article.

4. EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SYSTÈME

A partir des densités linéiques d'énergie magnétique, électrique et de puissance dissipée, nous pouvons construire la fonction densité de lagrangien non-conservatif \mathcal{L}_d^{nc} , définie par l'équation (3), dans le domaine fréquentiel. On a :

$$\mathcal{L}_d^{nc}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}_s) = \frac{1}{2} \left(\dot{\underline{q}}^\dagger L \dot{\underline{q}} + \frac{1}{j\omega} (\dot{\underline{q}}^\dagger R \dot{\underline{q}}) - \underline{q}_s^\dagger C^{-1} \underline{q}_s \right). \quad (10)$$

L'équation différentielle matricielle vérifiée par le vecteur d'état est obtenue par injection du Lagrangien dans les équations d'Euler-Lagrange (2). Les dérivations matricielles donnent :

$$(j\omega RC - \omega^2 LC) \underline{q} - \frac{\partial^2 \underline{q}}{\partial s^2} = 0. \quad (11)$$

Cette équation est une équation d'onde matricielle avec pertes exprimée dans le domaine harmonique. Elle correspond à $2N$ équations d'ondes couplées. Elle est résolue analytiquement dans l'espace propre, par diagonalisation de la matrice $j\omega RC - \omega^2 LC$, comme cela est classiquement fait pour les lignes de transmission multiconducteurs dans [10], page 222. Nous posons alors la matrice diagonale D de taille $2N \times 2N$ telle que,

$$D = K^{-1}(j\omega CR - \omega^2 CL)K = \text{diag}((d_i)_{1 \leq i \leq 2N}). \quad (12)$$

où K est la matrice de passage de taille $2N \times 2N$, et procédons au changement de coordonnées suivant :

$$\underline{X} = K^{-1} \underline{q}. \quad (13)$$

\underline{X} est le nouveau vecteur de coordonnées de taille $2N \times 1$ et l'équation (11) devient alors,

$$D \underline{X} - \frac{\partial^2 \underline{X}}{\partial s^2} = 0 \quad (14)$$

La résolution du système matriciel d'équations différentielles (14) est maintenant classique. Chacune des coordonnées \underline{X}_k du vecteur de coordonnées \underline{X} est soumis à une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients complexes d_k :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2N \rrbracket, \quad d_k \underline{X}_k - \frac{\partial^2 \underline{X}_k}{\partial s^2} = 0, \quad (15)$$

qui a pour solution l'équation (16) suivante,

$$\forall k \in \llbracket 1, 2N \rrbracket, \quad \underline{X}_k(s) = \underline{A}_{i_k} \exp(n_k s) + \underline{A}_{r_k} \exp(-n_k s) \quad (16)$$

où \underline{A}_{i_k} et \underline{A}_{r_k} sont des constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites. Elles correspondent à l'amplitude complexe de l'onde incidente et de l'onde réfléchie, tandis que les n_k sont les racines des valeurs propres de la matrice D . On note :

$$\forall k \in \llbracket 1, 2N \rrbracket, \quad n_k = \sqrt{d_k}. \quad (17)$$

La dernière étape de résolution consiste à identifier numériquement la valeur des $4N$ constantes d'intégration \underline{A}_{i_k} et \underline{A}_{r_k} grâce aux conditions aux limites électriques aux extrémités des spires, en $s = 0$ et $s = l_c/2$ (connexion série $\underline{q}_i = \underline{q}_j$, connexion parallèle $\underline{u}_i = \underline{u}_j$ ou source de tension V aux bornes des enroulements $\underline{u}_i - \underline{u}_j = V$). Cela est réalisé par un algorithme développé sur Matlab qui construit et résout un système linéaire pour chaque fréquence d'intérêt.

5. VALIDATION EXPÉRIMENTALE

Pour valider le modèle LT proposé, deux transformateurs planares à deux enroulements ont été conçus. La vue en coupe de leur fenêtre de bobinage est donnée Figure 5. Leur enroulement primaire est constitué de 5 spires connectées en série (en bleu) et le secondaire de 5 spires connectées en parallèle (en rouge), les 10 spires étant réparties sur 10 couches superposées. Dans le cas du premier transformateur, les deux enroulements ne sont pas entrelacés, comme représenté Figure 5 à gauche. Les enroulements du deuxième transformateur sont eux complètement entrelacés comme représenté Figure 5 à droite.

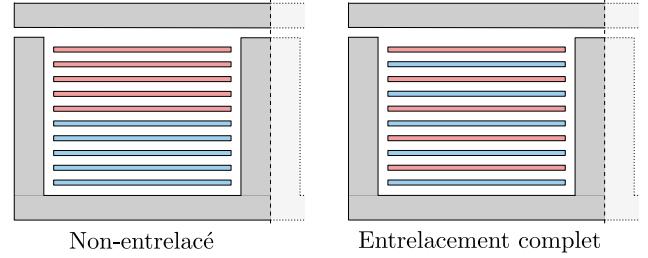


FIG. 5. Vue en coupe de la fenêtre de bobinage des transformateurs conçus pour la validation expérimentale du modèle.

Sur la figure 6, on observe la faculté du modèle LT à estimer avec une grande précision l'impédance du transformateur dans les trois essais classiques, court-circuit, circuit ouvert et mode commun, et sur une large bande de fréquences (1 kHz à 100 MHz). Il est également remarquablement rapide puisque mille points de fréquence sont calculés en moins d'une seconde.

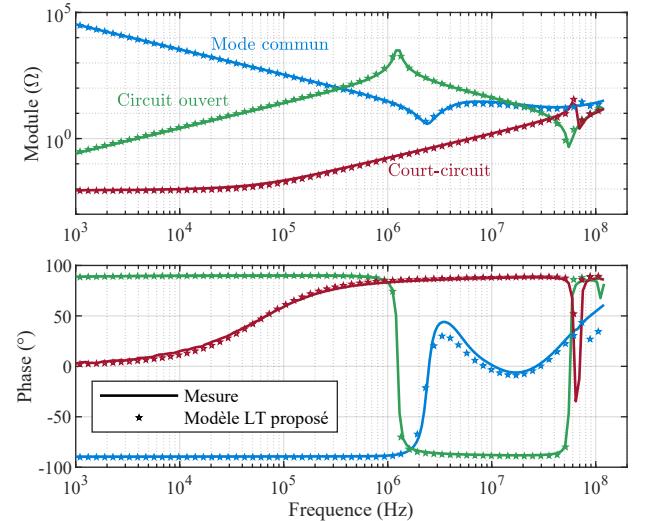


FIG. 6. Estimation des impédances en court-circuit, circuit ouvert et mode commun du transformateur à entrelacement complet par le modèle LT proposé.

D'autres éléments de validation expérimentale sont présentés sur les Figures 7 et 8 à partir d'un essai en court-circuit du transformateur au bobinage non-entrelacé. Ces graphes représentent respectivement la résistance AC et l'inductance de fuite vues de l'enroulement primaire en fonction de la fréquence (entre 1 kHz et 100 MHz). On y retrouve les mesures, les simulations éléments finis 3D réalisées avec le logiciel Ansys Maxwell, l'estimation du modèle analytique 2D invariant de l'article [4] (ne prenant pas en compte les couplages capacitifs) et enfin l'estimation du modèle analytique LT présenté dans cet article. Les deux modèles convergent parfaitement à basse fréquence et fournissent des résultats identiques. Leurs chemins se séparent à partir de quelques MHz, fréquences pour lesquelles les effets

capacitifs ne peuvent plus être négligées. Le modèle LT rend lui bien compte du comportement capacitif du transformateur, sans compromis sur la précision des estimations de la résistance AC et de l'inductance de fuite. Il constitue une généralisation du modèle 2D invariant proposé dans [4], rendant ce dernier quasi-obsolète.

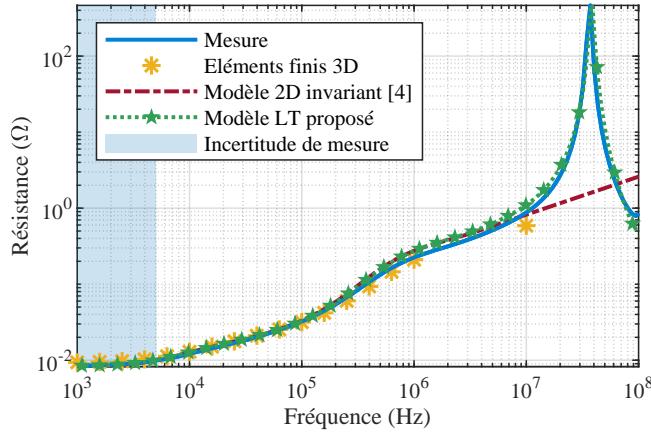


FIG. 7. Résistance des bobinage en fonction de la fréquence, e.g. partie réelle de l'impédance en court-circuit (cas non-entrelacé).

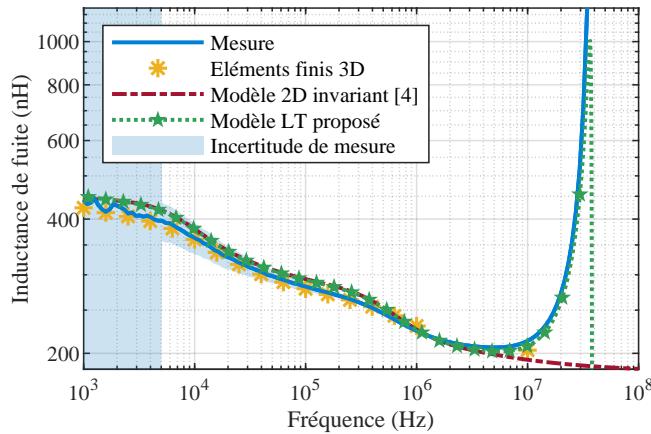


FIG. 8. Inductance de fuite des bobinage en fonction de la fréquence, e.g. partie imaginaire de l'impédance en court-circuit (cas non-entrelacé).

6. CONCLUSION

Ce travail propose une méthode originale de calcul du comportement du transformateur validé expérimentalement sur une très large plage de fréquence. Il permet la simulation du comportement électromagnétique complet (inductif, résistif et capacitif) du transformateur planaire quelles que soient les connexions électriques à ses bornes. Pour cela, il se fonde uniquement sur les dimensions géométriques et les propriétés des matériaux. De ces simulations peuvent être extraites l'ensemble des grandeurs macroscopiques d'intérêt pour la conception telles que la résistance des bobinages, l'inductance de fuite, l'inductance magnétisante, la bande passante et même l'impédance inter-enroulement.

Ce modèle LT peut être mis en œuvre et automatisé sur n'importe quelle plateforme de calcul numérique. Dans sa version actuelle, peuvent être simulés des transformateurs constitués d'une unique spire par couche. Les temps de calcul très courts offrent la possibilité de concevoir le composant en testant de nombreux paramètres et de choisir ainsi le meilleur dimensionnement. De futures recherches seront menées pour élargir

le champ d'application de ce modèle LT aux transformateurs constitués de plus d'une spire par couche.

7. ANNEXE

Cette annexe fournit l'expression analytique des matrices R , L et C en fonction des paramètres géométriques du transformateur définis 3 et des propriétés de ses matériaux. Les grands traits de la méthode de calcul sont également mis en évidence.

7.1. Energie magnétique

7.1.1. Energie magnétisante

Pour calculer l'énergie magnétisante stockée dans le matériau magnétique et l'entrefer \mathcal{E}_m , il nous faut déterminer les expressions des champs H_a , H_b et H_c dans le matériau magnétique en fonction des courants \dot{q}_k . Cela est fait en appliquant le théorème d'Ampère sur les contours ζ_a et ζ_b de longueur d_f définis Figure 9 et en exploitant l'équation de conservation du flux stipulant que $2H_c = H_a + H_b$. On obtient alors :

$$H_a = \frac{2d_f + \frac{3}{2}e_0\mu - c}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} \sum_{k=1}^N \dot{q}_k + \frac{c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu}}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} \sum_{k=N+1}^{2N} \dot{q}_k, \quad (18)$$

$$H_b = -\frac{c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu}}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} \sum_{k=1}^N \dot{q}_k - \frac{2d_f + \frac{3}{2}e_0\mu - c}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} \sum_{k=N+1}^{2N} \dot{q}_k, \quad (19)$$

et

$$H_c = \frac{\sum_{k=1}^N \dot{q}_k - \sum_{k=N+1}^{2N} \dot{q}_k}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)}. \quad (20)$$

A partir de la définition de l'énergie magnétique dans le domaine fréquentiel,

$$\mathcal{E}_m = \iint_S \Re \left\{ \frac{BH^*}{2} \right\} dS, \quad (21)$$

des lois de comportement des matériaux données Equations (4) et (5), l'énergie magnétique magnétisant peut être calculée et exprimée sous forme de produit matriciel :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \dot{q}^\dagger L_m \dot{q}, \quad (22)$$

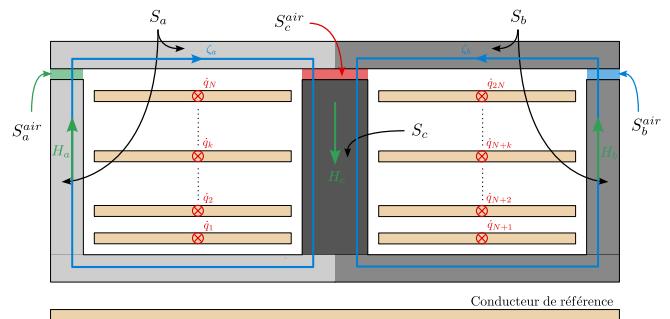


FIG. 9. Vue schématique du transformateur en coupe dans le plan (x,y). Définition des contours d'Ampère, champs magnétiques et sections de matériaux stockant de l'énergie magnétique « magnétisante ».

où L_m est la matrice inductance magnétisante linéique,

$$L_m = \mu_0 \left[(|\underline{\mu}|^2 S_a^{air} + \mu' S_a) W_a^\dagger W_a + (|\underline{\mu}|^2 S_b^{air} + \mu' S_b) W_b^\dagger W_b + (|\underline{\mu}|^2 S_c^{air} + \mu' S_c) W_c^\dagger W_c \right], \quad (23)$$

où les différentes surfaces S sont définies Figure 9, et,

$$W_a = \frac{2d_f + \frac{3}{2}e_0\underline{\mu} - c}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} [\mathbb{1}_{1 \times N} \quad \mathbb{0}_{1 \times N}] \\ + \frac{c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu}}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} [\mathbb{0}_{1 \times N} \quad \mathbb{1}_{1 \times N}], \quad (24)$$

$$W_b = \frac{c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu}}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} [\mathbb{1}_{1 \times N} \quad \mathbb{0}_{1 \times N}] \\ + \frac{2d_f + \frac{3}{2}e_0\underline{\mu} - c}{2(d_f + \underline{\mu}e_0)(d_f - c + \frac{e_0}{2}\underline{\mu})} [\mathbb{0}_{1 \times N} \quad \mathbb{1}_{1 \times N}], \quad (25)$$

$$W_c = \frac{1}{2(lm + \underline{\mu}e_0)} [\mathbb{1}_{1 \times N} \quad -\mathbb{1}_{1 \times N}]. \quad (26)$$

7.1.2. Energie de fuite

L'énergie magnétique de fuite \mathcal{E}_f est calculée dans les couches de cuivre et les couches d'isolant en s'appuyant sur les hypothèses 7 et 8. On réexploite entièrement les expressions du modèle 2D invariant de [4] que l'on rappelle ci-dessous :

$$\mathcal{E}_f = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^\dagger L_f \dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^\dagger \begin{pmatrix} L_{f,N} & \mathbb{0}_{N \times N} \\ \mathbb{0}_{N \times N} & L_{f,N} \end{pmatrix} \dot{\underline{q}}, \quad (27)$$

où $L_{f,N} = P^\dagger M P$ avec,

$$M = \frac{1}{\sigma \delta h_c \omega} \begin{pmatrix} A_f & -\frac{B_f}{2} & & & (0) \\ -\frac{B_f}{2} & 2A_f & -\frac{B_f}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{B_f}{2} & 2A_f & -\frac{B_f}{2} \\ (0) & & & -\frac{B_f}{2} & A_f \end{pmatrix} \\ + \frac{\mu_0}{h_c} \begin{pmatrix} ei_1 & & & & (0) \\ ei_2 & & & & \\ & \ddots & & & \\ (0) & & & & ei_{N+1} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{(N+1) \times N}, \quad (29)$$

$$A_f = \frac{\sinh(2\Delta) - \sin(2\Delta)}{\cosh(2\Delta) - \cos(2\Delta)}, \quad (30)$$

$$B_f = 4 \frac{\cos(\Delta) \sinh(\Delta) - \cosh(\Delta) \sin(\Delta)}{\cosh(2\Delta) - \cos(2\Delta)}, \quad (31)$$

δ l'épaisseur de peau dans le cuivre de conductivité σ ,

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}, \quad (32)$$

et enfin

$$\Delta = \frac{e_c}{\delta}, \quad (33)$$

les paramètres géométriques étant définis Figure 3.

7.1.3. Matrice inductance linéique

La matrice inductance linéique L s'exprime alors,

$$L = L_m + L_f. \quad (34)$$

7.2. Pertes

7.2.1. Pertes fer

Les pertes fer \mathcal{P}_m dans le matériau magnétique se défisent comme suit dans le domaine fréquentiel :

$$\mathcal{P} = \iint_S \Re \{ j\omega \underline{B} \underline{H}^* \} dS. \quad (35)$$

Elles sont calculées à partir des champs \underline{H}_a , \underline{H}_b et \underline{H}_c , dont les expressions sont données Equations (18), (19) et (20). On a :

$$\mathcal{P}_m = \dot{\underline{q}}^\dagger R_m \dot{\underline{q}}, \quad (36)$$

où R_m est la matrice résistance « fer » linéique,

$$R_m = \omega \mu_0 \mu'' \left[S_a W_a^\dagger W_a + S_b W_b^\dagger W_b + S_c W_c^\dagger W_c \right], \quad (37)$$

et les matrices W_a , W_b et W_c sont définies par les Equations (24), (25) et (26).

7.2.2. Pertes cuivre

Les pertes cuivres \mathcal{P}_J sont calculées dans les couches de cuivre uniquement. Comme pour l'inductance de fuite, nous réexploitons entièrement l'expression du modèle 2D invariant de [4] que l'on rappelle ci-dessous :

$$\mathcal{P}_J = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^\dagger R_J \dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^\dagger \begin{pmatrix} R_{J,N} & \mathbb{0}_{N \times N} \\ \mathbb{0}_{N \times N} & R_{c,N} \end{pmatrix} \dot{\underline{q}}, \quad (38)$$

où,

$$R_{J,N} = \frac{1}{\sigma \delta h_c} P^T \underbrace{\begin{pmatrix} A_J & -\frac{B_J}{2} & & & (0) \\ -\frac{B_J}{2} & 2A_J & -\frac{B_J}{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{B_J}{2} & 2A_J & -\frac{B_J}{2} \\ (0) & & & -\frac{B_J}{2} & A_J \end{pmatrix}}_{(N+1) \times (N+1)} P, \quad (39)$$

P étant donné Equation (29) et,

$$A_J = \frac{\sinh(2\Delta) + \sin(2\Delta)}{\cosh(2\Delta) - \cos(2\Delta)}, \quad (40)$$

$$B_J = 4 \frac{\cos(\Delta) \sinh(\Delta) + \cosh(\Delta) \sin(\Delta)}{\cosh(2\Delta) - \cos(2\Delta)}. \quad (41)$$

7.2.3. Matrice résistance linéique

La matrice résistance linéique R s'exprime alors,

$$R = R_m + R_J. \quad (42)$$

7.3. Energie électrique

L'énergie électrique stockée dans les isolants s'exprime,

$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} \frac{dq}{ds}^\dagger C^{-1} \frac{dq}{ds} = \frac{1}{2} \frac{dq}{ds}^\dagger \begin{pmatrix} C_N^{-1} & \mathbb{0}_{N \times N} \\ \mathbb{0}_{N \times N} & C_N^{-1} \end{pmatrix} \frac{dq}{ds}, \quad (43)$$

D'après l'hypothèse 9, les couplages capacitifs entre les deux fenêtres de bobinage sont négligés, et leur symétrie géométrique permet de se contenter du calcul de la matrice capacité C_N d'une des deux fenêtre, par exemple celle de gauche. Pour cela, il nous faut exprimer le lien entre inductions électriques \underline{D}_k et les densités linéiques de charge $\partial q_k / \partial s$, $\forall k \in [1, N]$. Cela est fait en appliquant le théorème de Gauss sur les surface fermées Σ_k définies Figure 9. On a alors,

$$[\underline{D}_1 \dots \underline{D}_N]^T = \frac{1}{h_c} Z \frac{d\underline{q}_{1N}}{ds}, \quad (44)$$

où,

$$\underline{q}_{1N} = [\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N]^T, \quad (45)$$

et,

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}_{N \times N}. \quad (46)$$

Le calcul de l'énergie électrique $\mathcal{E}_{\epsilon, N}$ de la fenêtre de bobinage de gauche permet enfin d'obtenir l'expression de la matrice capacité linéique C_N associée :

$$\mathcal{E}_{\epsilon, N} = \frac{1}{2} \frac{d\underline{q}_{1N}}{ds}^\dagger \underbrace{\frac{1}{h_c \epsilon_0 \epsilon_r} Z^T \begin{pmatrix} \epsilon_r e_1 & & (0) \\ & e_i_2 & \\ & & \ddots \\ (0) & & e_i_N \end{pmatrix} Z}_{=C_N^{-1}} \frac{d\underline{q}_{1N}}{ds}, \quad (47)$$

où ϵ_r est la permittivité relative de l'isolant entre les couches de conducteur, et,

$$e_1 = l_1 + \frac{e_f}{\epsilon_f} + e_{i1}, \quad (48)$$

avec ϵ_f la permittivité relative du matériau magnétique, e_f et l_1 étant définis sur la Figure 10.

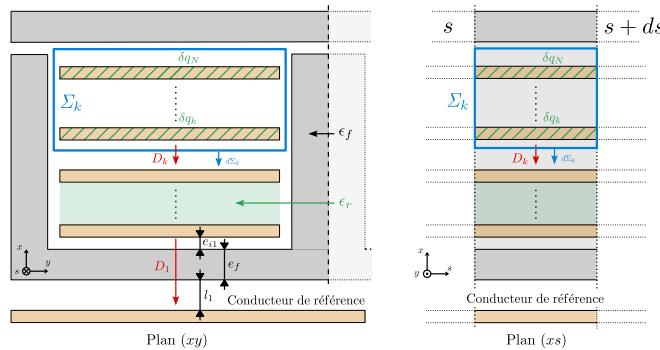


FIG. 10. Vue schématique du transformateur en coupe dans les plans (x,y) et (x,s). Définition des surfaces de Gauss et inductions électriques.

8. RÉFÉRENCES

- [1] Z. Ouyang and M. A. E. Andersen, « Overview of planar magnetic technology — Fundamental properties », IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 29, no. 9, pp. 4888–4900, Sep. 2014.
- [2] J. S. Ngoua Teu Magambo, R. Bakri, X. Margueron, P. Le Moigne, A. Mahe, S. Guguen et T. Bensalah, « Planar Magnetic Components in More Electric Aircraft : Review of Technology and Key Parameters for DC–DC Power Electronic Converter », in IEEE Transactions on Transportation Electrification, vol. 3, no. 4, pp. 831–842, Dec. 2017.
- [3] L. Pniak, B. Revol, L. Quéval, J-S Ngoua Teu Magambo et O. Béthoux, Pre-sizing of a modular high power density DC/DC converter with GaN components, Mathematics and Computers in Simulation, 2023

- [4] L. Pniak, L. Quéval, B. Revol, J.-S. N. Teu, C. Gautier, et O. Béthoux, « AC Resistance and Leakage Inductance Estimation for Planar Transformers With Parallel-Connected Windings », IEEE Trans. Power Electron., vol. 38, p. 728–738, janv. 2023.
- [5] X. Margueron, A. Besri, Y. Lembeye, et J.-P. Keradec, « Current Sharing Between Parallel Turns of a Planar Transformer : Prediction and Improvement Using a Circuit Simulation Software », IEEE Trans. on Ind. Applicat., vol. 46, p. 1064–1071, 2010.
- [6] Wei Chen, Yipeng Yan, Yuequan Hu, et Qing Lu, « Model and design of PCB parallel winding for planar transformer », IEEE Transaction on Magnetics, vol. 39, p. 3202–3204, sept. 2003.
- [7] J.-L. Kotny, X. Margueron et N. Idir, « High-Frequency Model of the Coupled Inductors Used in EMI Filters », in IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 27, no. 6, pp. 2805–2812, June 2012.
- [8] W. Tan, X. Margueron, et N. Idir, « Analytical modeling of parasitic capacitances for a planar common mode inductor in EMI filters », in 2012 15th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE/PEMC), Novi Sad, Serbia, sept. 2012.
- [9] E. Labouré, « Intégration hybride des dispositifs de l'électronique de puissance », HDR, Paris XI.
- [10] C. R. Paul, *Analysis of multiconductor transmission lines*. Wiley, 1994.
- [11] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical mechanics*, Chapitre 13.2, page 562. Addison-Wesley, 1950.
- [12] Hermann A. Haus, *Introduction to Electroquasistatics and Magnetoquasistatics*. Prentice Hall, 1989.