

Minimisation des harmoniques du couple d'une machine électrique par optimisation topologique

Thomas GAUTHEY¹, Maya HAGE HASSAN¹, Frédéric MESSINE², Frédéric GILLON³

¹ GeePs, Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, Sorbonne Université, CNRS, 91192, Gif-sur-Yvette

² LAPLACE, Toulouse-INP, Université de Toulouse, Toulouse, France

³ Univ. Lille, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, Junia, ULR 2697 - L2EP, Lille, France

RESUME – Dans cet article, la minimisation des ondulations de couple d'une machine à reluctance variable sous contrainte de couple moyen minimal est étudiée. La formulation présentée permet de considérer les harmoniques de couple influençant le plus l'ondulation de couple. Cette méthode est comparée à l'optimisation de l'ondulation par minimisation de la variance normalisée du couple proposée dans la littérature. Enfin une formulation complémentaire tirant avantage des deux méthodes est proposée. Les performances de la machine sont évaluées par FEA et l'optimisation topologique est effectuée par un algorithme basé sur des pas de gradient calculés à partir de la résolution de problèmes adjoints.

Mots-clés – Optimisation topologique, machine à reluctance variable, ondulations de couple, contenu harmonique

1. INTRODUCTION

Les machines à reluctance variable (MRV) présentent de nombreux avantages, dont un coût faible, grâce à une structure simple. Ces caractéristiques ont fait d'elle, durant la dernière décennie, une solution potentielle pour la motorisation des véhicules hybrides et électriques. L'un des objectifs pour ces machines est l'obtention d'un couple moyen important en préservant une faible ondulation de couple. L'obtention d'un bon compromis dépend de la géométrie du rotor et du stator ainsi que de la commande en courant.

Plusieurs formulations du problème en optimisation topologique ont été proposées pour l'amélioration des performances des machines électriques. Dans [1], la méthode Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) a été appliquée à la conception du rotor d'une MRV 6/4 afin d'atteindre un profil cible de couple. La fonction objectif est formulée en utilisant la décomposition en série de Fourier de l'inductance. Dans [2], une méthode d'optimisation de forme est appliquée à un problème de minimisation du taux de distorsion harmonique du couple d'une machine à aimants permanents. Une autre approche à la conception du rotor d'une MRV est proposée dans [3] où la fonction objectif proposée afin de minimiser l'ondulation est la variance du couple normalisée par sa valeur moyenne.

Dans cet article, nous proposons de s'appuyer sur une approche qui consiste à minimiser l'ondulation de couple en réduisant uniquement certains de ses harmoniques. Le problème est formulé avec une contrainte sur le couple moyen et est résolu par l'algorithme Bound Constraint Lagrangian method [4] incluant ainsi une contrainte de couple moyen minimal. Les performances obtenues sont comparées dans la partie 5 à l'optimisation de la variance de l'ondulation de couple [3]. Dans la partie 6, une formulation complémentaire tirant partie des forces des deux formulations est proposée.

2. ÉVALUATION DES PERFORMANCES

Les performances de la machine sont obtenues par résolution du problème de magnéto-statique non-linéaire (1) pour N positions du rotor θ_k en utilisant la librairie NGSolve.

Ce problème s'écrit en forme faible :

$$\text{Trouver } u_k, \quad \underbrace{\int_{\Omega} \nu(\rho, u_k) \nabla u_k \cdot \nabla v \, dx}_{K_{\theta_k}(u_k, v_k, \rho)} = \underbrace{\int_{\Omega} j(\theta_k) v_k \, dx}_{f_{\theta_k}(v)}, \quad \forall v_k \quad (1)$$

où u_k est l'état magnétique pour la position k , v_k une fonction test et ν la reluctivité par domaine définie en (2)

$$\nu(\rho, u) = \begin{cases} \hat{\nu}(|\nabla u|) & \text{sur } \Omega_{\text{stator}} \\ \nu_0 & \text{sur } \Omega_{\text{rotor}} \cup \Omega_{\text{stator}} \\ \nu_0 + f(\rho)(\hat{\nu}(|\nabla u|) - \nu_0) & \text{sur } \Omega_{\text{rotor}} \end{cases} \quad (2)$$

et la reluctivité non-linéaire $\hat{\nu}$ est modélisée par une courbe BH de Marrocco comme dans [5] son évolution en fonction de l'intensité du champ magnétique est donnée en Fig. 1

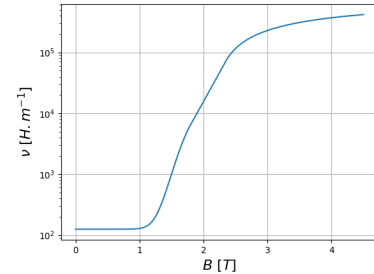


FIG. 1. Reluctivité $\hat{\nu}$ en fonction de la norme du champ magnétique B

Dans le rotor, la densité ρ est définie comme la variable du problème d'optimisation présenté dans la section suivante. Les propriétés magnétiques sont obtenues par interpolation de type SIMP-All [5] via la fonction $f(\rho)$ définie par :

$$f(\rho) = \frac{2\nu_0}{\nu_0 + \nu_1} \rho + \frac{\nu_0 - \nu_1}{\nu_0 + \nu_1} \rho^2, \quad (3)$$

où ν_1 correspond à la reluctivité à faible excitation magnétique, dans la partie quasi-linéaire de la courbe BH, soit pour $|B| \approx 0.3T$ et donc $\nu_1 = \frac{\nu_0}{6356}$.

Dans le cadre de cette étude, un cas test de MRV à quatre dents Fig. 3 similaire à celui optimisé par une méthode paramétrique dans [6] est choisi.

Les dimensions de la machine sont détaillées dans le Tableau 1.

Le bobinage est alimenté par des créneaux idéaux de courant modélisés par une densité uniforme $j(\theta)$.

Un ensemble de 90 pas de couple instantanés T_k sont répartis uniformément pour des positions d'angle mécaniques θ_k entre 0 et $\pi/2$. Leur évaluation est effectuée par intégration avec la

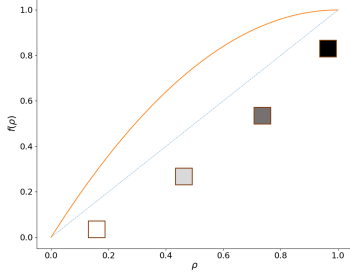


FIG. 2. Interpolation entre l'air ($\rho = 0$) et le ferromagnétique ($\rho = 1$)

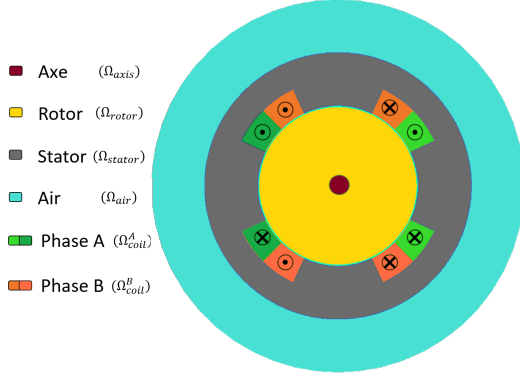


FIG. 3. Géométrie de la MRV

méthode d'Arkio [7].

$$T(u) = \frac{L_z \nu_0}{r_s - r_r} \int_{\Omega_{gap}} \mathcal{Q} \nabla u \cdot \nabla u \, dx \, dy. \quad (4)$$

où $\mathcal{Q} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} 2xy & y^2 - x^2 \\ y^2 - x^2 & -2xy \end{pmatrix}$ et r_s, r_r sont deux rayons délimitant le domaine de calcul du couple à l'intérieur de l'entrefer.

La rotation est prise en compte par une bande de mouvement [8]. Ainsi pour un vecteur de couple instantanés \mathbf{T} , la norme du m^{ieme} harmonique peut être évaluée en utilisant une transformée de Fourier discrète (DFT) donnée dans l'équation (5).

$$\text{DFT}(\mathbf{T})[m] = \frac{2}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} (\cos(\theta_{m,i}) + \mathbf{j} \sin(\theta_{m,i})) T_i \right| \quad (5)$$

où $\theta_{m,i} = 2\pi m i / N \quad \forall m \in \llbracket 1, N/2 \rrbracket$.

3. PROBLÈME D'OPTIMISATION

Le problème d'optimisation du m^{ieme} harmonique de couple peut donc ainsi être formulé :

$$(\mathcal{P}_m) : \begin{cases} \min_{\rho} \text{DFT}(\mathbf{T})[m] \\ \text{u.c. } K_{\theta_k}(u_k, v_k, \rho) = f_{\theta_k}(v) \quad \forall v_k, \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \text{u.c. } \bar{\mathbf{T}} \geq \bar{T}_{min} (= 1.5 \text{ N.m}) \end{cases} \quad (6)$$

Un Lagrangien (7) est défini et permet par recherche de point fixe d'obtenir une direction de descente prenant en compte les contraintes de (6).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{\Lambda}, \rho) = & \text{DFT}(\mathbf{T})[m] + \psi(\bar{\mathbf{T}} - \bar{T}_{min}, \lambda^*, \mu) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} (K_{\theta_k}(u_k, \lambda_k, \rho) - f_{\theta_k}(v)) \end{aligned} \quad (7)$$

TABLEAU 1. Paramètres géométriques et électriques

Paramètre	Valeur	Unité
Rayon de l'axe	5	mm
Rayon du rotor	29.5	mm
Épaisseur de l'entrefer	0.5	mm
Rayon d'alésage	30	mm
Rayon interne de bobinage	40	mm
Épaisseur de la culasse rotor	10	mm
Angle d'ouverture dentaire	50	°
Longueur L_z	120	mm
Densité de courant maximale J_{max}	5	A/mm ²
Nombre de paires de pôles	1	-

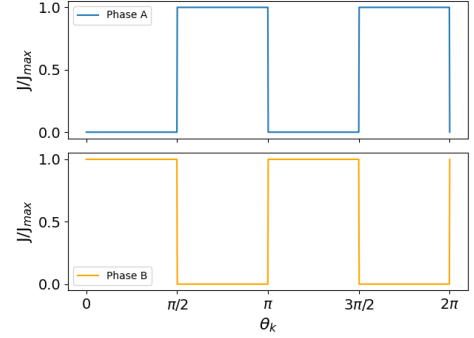


FIG. 4. Forme idéale de courant

où $U = [u_k, k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket]$, $\mathbf{\Lambda} = [\lambda_k, k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket]$, λ_k sont les multiplicateurs adjoints associés aux contraintes physiques d'égalité et $\psi(\cdot, \lambda^*, \mu)$ est une fonction permettant d'assurer la contrainte d'inégalité.

$$\psi(x, \lambda^*, \mu) = \begin{cases} -\lambda^* x + \frac{\mu}{2} x^2 \\ -\frac{1}{2\mu} (\lambda^*)^2 \end{cases} \quad (8)$$

où λ^* et μ sont des scalaires mis à jour par l'algorithme pour maintenir la contrainte. Cette formulation est détaillée dans [4]. Le couple étant calculé hors du domaine d'optimisation, le gradient du problème peut alors être écrit :

$$d_{\rho} \mathcal{L} = \sum_{k=0}^{N-1} \partial_{\rho} K_{\theta_k}(u_k, \lambda_k, \rho). \quad (9)$$

Les états adjoints λ_k sont obtenus par une analyse aux éléments finis linéaire formulée par :

$$\begin{aligned} \partial_{u_k} K_{\theta_k}(u_k, \lambda_k, \rho)(v_k) = & -\partial_{u_k} \text{DFT}(\mathbf{T})[m](v_k) \\ & - \partial_{u_k} \psi(\bar{\mathbf{T}} - \bar{T}_{min}, \lambda^*, \mu)(v_k) \end{aligned} \quad (10)$$

Afin d'établir la dérivée partielle selon u_k dans la direction v_k de la norme de la m^{ieme} harmonique, les hypothèses suivantes sont choisies :

- Les états magnétiques obtenus par résolution des N équations de la magnétostatique sont tous indépendants.
- Le couple instantané pour une position θ_k ne dépend que de l'état u_k

Ainsi on obtient que les dérivées des états croisés sont nulles soit que :

$$\partial_{u_k}(u_i)(v_k) = \delta_{ik} v_k = \begin{cases} v_k & \text{si } k = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (11)$$

D'où, après simplifications, d'après la règle de la chaîne, on peut écrire :

$$\partial_{u_k} DFT(\mathbf{T})[m](v_k) = \beta_{m,k}(\mathbf{U}) \partial_{u_k} T(u_k)(v_k) \quad (12)$$

où $\beta_{m,k}(\mathbf{U})$ est un scalaire tel que :

$$\beta_{m,k}(\mathbf{U}) = \frac{4 \sum_{i=0}^{N-1} \cos\left(\frac{2\pi m(i-k)}{N}\right) T(u_i)}{N^2 DFT(\mathbf{T})[m]} \quad (13)$$

4. RÉSULTATS

Pour obtenir le point de départ, un problème de maximisation du couple moyen [14](#) est résolu au préalable.

$$(\mathcal{P}_{mean}) : \begin{cases} \min_{\rho} -(\bar{\mathbf{T}}) \\ u.c. K_{\theta_k}(u_k, v_k, \rho) = f_{\theta_k}(v) \quad \forall v_k, \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \end{cases} \quad (14)$$

La distribution optimale obtenue par résolution de ce problème [Fig.5a](#) est choisie afin d'obtenir un point de départ satisfaisant la contrainte.

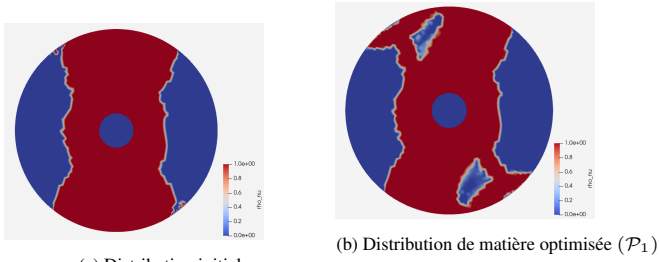


FIG. 5. Distribution de matière dans le rotor (rouge : fer, bleu : air)

La distribution de matière finale obtenue par recherche d'un optimum du problème (\mathcal{P}_1) de minimisation de l'harmonique de rang 1 est donnée en [Fig. 5b](#). Elle présente une asymétrie dans son design qui peut être attribuée au sens de rotation horaire pour lequel la machine est optimisée. L'optimisation converge en 60 itérations et s'arrête sur son critère de taille de pas admissible minimale

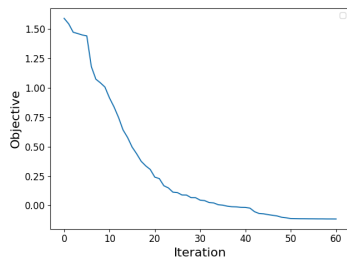


FIG. 6. Courbe de convergence pour (\mathcal{P}_1)

Pour la géométrie optimale, le taux d'ondulation est de 192% par rapport à 143% pour la distribution de matière initiale. En effet, la norme du premier harmonique (en orange dans [Fig. 8](#)) a été réduite par un facteur 1000 par rapport à sa valeur initiale.

On peut cependant noter qu'en fixant la géométrie du stator et la forme des courants, cette diminution du premier harmonique s'accompagne d'une augmentation du reste des harmoniques, ce qui est attendu.

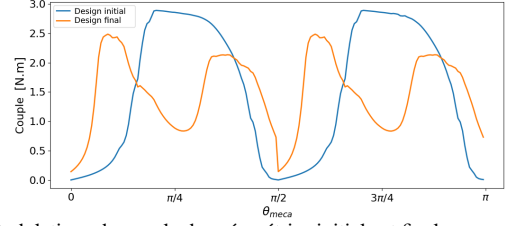


FIG. 7. Ondulations de couple des géométries initiale et finale

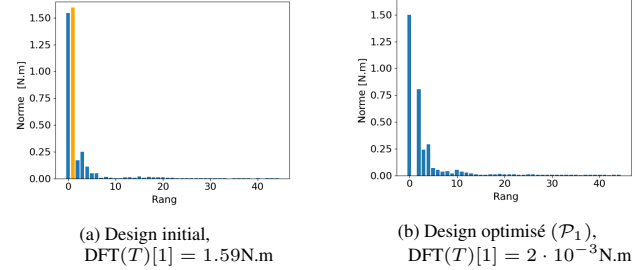


FIG. 8. Contenu harmonique du couple

5. DISCUSSION

Dans la littérature de nombreuses approches sont proposées afin de minimiser les ondulations de couple. Le critère "classique" en génie électrique utilise des opérateurs maximum et minimum non-dérivables [15](#). Il n'est donc pas applicable dans le cas présent. Il est ainsi remplacé par l'ondulation RMS [16](#).

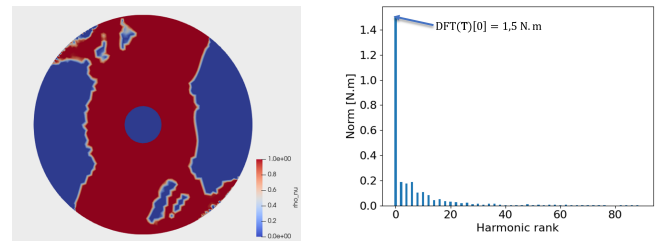
$$\Delta T = \frac{\max(T) - \min(T)}{\bar{T}} \quad (15)$$

$$\Delta_{rms} T = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{\bar{T}} (T(u_i) - \bar{T}) \right)^2} \quad (16)$$

Le problème de minimisation de l'ondulation du couple s'écrit alors :

$$(\mathcal{P}_{RMS}) : \begin{cases} \min_{\rho} \Delta_{rms} T \\ u.c. K_{\theta_k}(u_k, v_k, \rho) = f_{\theta_k}(v) \quad \forall v_k, \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ u.c. \bar{\mathbf{T}} \geq \bar{T}_{min} (= 1.5 \text{ N.m}) \end{cases} \quad (17)$$

Le même algorithme est appliqué à la résolution du problème et les résultats sont présentés en [Fig.9](#)



(a) Distribution optimisée (b) Contenu harmonique
FIG. 9. Design final et performance pour la minimisation de la variance du couple

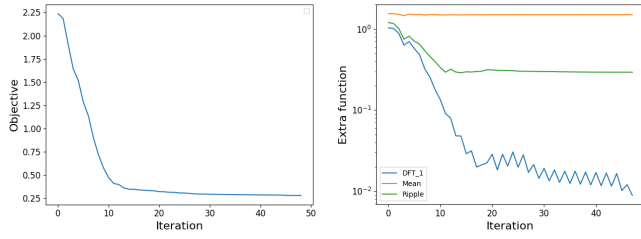
La solution optimale présente la même antisymétrie que pour la minimisation de l'harmonique 1 avec une topologie différente. Le contenu harmonique final présente une diminution de l'harmonique 1 et une augmentation des harmoniques d'ordre supérieur. Les performances en terme d'ondulations sont cependant bien meilleure que pour la minimisation seule de l'harmonique 1 avec 86% contre 143% précédemment. On perd cependant tout contrôle sur les potentielles harmoniques critiques que l'on veut supprimer du couple.

6. UNE APPROCHE COMPLÉMENTAIRE

L'ondulation RMS et l'harmonique 1 présentent des niveaux similaires dans configuration initiale, il est donc possible de les sommer en un nouveau problème d'optimisation.

$$(\mathcal{P}_{m,RMS}) : \begin{cases} \min_{\rho} \Delta_{rms} \mathbf{T} + \text{DFT}(\mathbf{T})[m] \\ \text{u.c. } K_{\theta_k}(u_k, v_k, \rho) = f_{\theta_k}(v) \quad \forall v_k, \forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket \\ \text{u.c. } \bar{\mathbf{T}} \geq \bar{T}_{min} (= 1.5 \text{ N.m}) \end{cases} \quad (18)$$

On résout donc en partant de la distribution de matière en Fig.5a, le problème de minimisation simultanée de la première harmonique et de l'ondulation de couple RMS ($\mathcal{P}_{1,RMS}$). L'algorithme converge au bout de 49 itérations et s'arrête selon le critère d'amélioration relative minimale ($< 0.01\%$).



(a) Fonction objectif agrégée (b) Fonction objectif et contraintes
FIG. 10. Courbes de convergence pour ($\mathcal{P}_{1,RMS}$)

Les courbes de couple comparée sont données en Fig 11

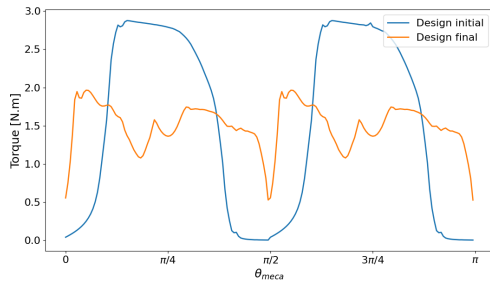
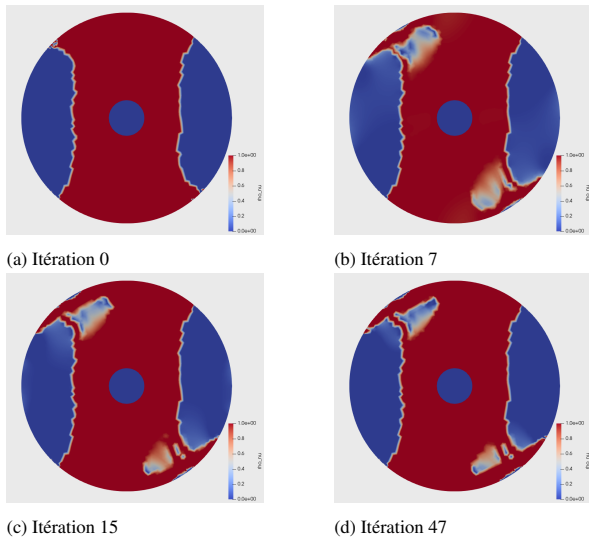


FIG. 11. Courbe de couple comparées pour ($\mathcal{P}_{1,RMS}$)

L'évolution du design aux points d'inflexion des courbes de convergence sont données en Fig 12



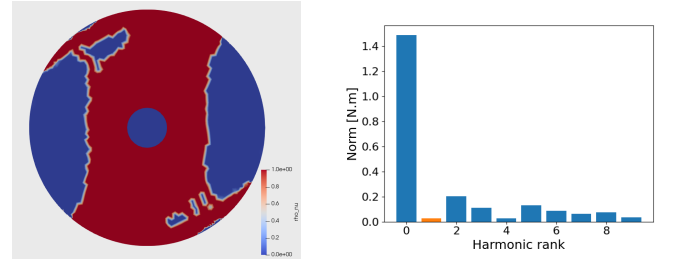
(c) Itération 15 (d) Itération 47
FIG. 12. Évolution du design du rotor pour ($\mathcal{P}_{1,RMS}$)

Après convergence, la distribution finale de matière présente

Design	\mathbf{T} [N.m]	$\text{DFT}(\mathbf{T})[1]$ [N.m]	ΔT	$\Delta_{RMS} T$
Initial	1.55	1.56	185%	73.6%
\mathcal{P}_1	1.51	$6.83 \cdot 10^{-3}$	104%	16.1%
\mathcal{P}_{RMS}	1.50	$1.73 \cdot 10^{-1}$	82.5%	9.79%
$\mathcal{P}_{1,RMS}$	1.50	$1.81 \cdot 10^{-2}$	95.8%	15.0%
$\mathcal{P}_{1,RMS}^{(pp)}$	1.49	$2.60 \cdot 10^{-2}$	93%	11.6%

TABLEAU 2. Performances comparées des différentes formulations

encore des matériaux intermédiaires. Afin d'obtenir un géométrie utilisant des matériaux connues, la densité est filtrée avec un seuil de $\rho_s = 0.5$ et l'algorithme est relancé, convergeant alors en 3 itérations Fig.13.



(a) Design final après filtrage (b) Transformée de Fourier du couple
FIG. 13. Design filtré pour ($\mathcal{P}_{1,RMS}$)

La distribution de matière après cette étape de post-traitement ne présente plus de matériaux intermédiaires et possède de meilleures performances comme présenté en Tab.2.

7. CONCLUSION

Dans cet article, une formulation pour un problème d'optimisation des ondulations de couple par la minimisation de certaines harmoniques critiques est proposée. Les performances obtenues sont comparées à la minimisation directe de cette même ondulation. Enfin une formulation complémentaire profitant des avantages des deux méthodes : contrôle fin du contenu harmonique et minimisation efficace de l'ondulation est proposée.

8. REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce papier est développé dans le cadre d'un projet interne entre les trois laboratoires de recherche. Nous tenons à remercier le GDR Seeds pour le financement de ce projet commun.

9. RÉFÉRENCES

- [1] J. Lee, J. H. Seo, and N. Kikuchi, "Topology optimization of switched reluctance motors for the desired torque profile," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 42, no. 5, pp. 783–796, Nov. 2010.
- [2] M. Merkel, P. Gangl, and S. Schöps, "Shape optimization of rotating electric machines using isogeometric analysis," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 36, no. 4, pp. 2683–2690, 2021.
- [3] H. Zhang and S. Wang, "Topology optimization of rotor pole in switched reluctance motor for minimum torque ripple," *Electric Power Components and Systems*, vol. 45, no. 8, pp. 905–911, May 2017.
- [4] N. Jorge and W. Stephen J, "Penalty, barrier, and augmented lagrangian methods," in *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*. Springer-Verlag, 1999, pp. 488–525.
- [5] T. Gauthey, P. Gangl, and M. H. Hassan, "Multi-material topology optimization with continuous magnetization direction for motors design," in *2022 International Conference on Electrical Machines (ICEM)*. IEEE, Sep. 2022.
- [6] P. T. Hieu, D.-H. Lee, and J.-W. Ahn, "Design of a high speed 4/2 switched reluctance motor for blender application," in *2017 IEEE Transporta-*

tion Electrification Conference and Expo, Asia-Pacific (ITEC Asia-Pacific), 2017, pp. 1–5.

- [7] A. Arkkio, “Analysis of induction motors based on the numerical solution of the magnetic field and circuit equations,” Doctoral thesis, 1987.
- [8] B. Davat, Z. Ren, and M. Lajoie-Mazenc, “The movement in field modeling,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 21, no. 6, pp. 2296–2298, 1985.