

Optimisation topologique magnéto-mécanique d'un moteur synchrone à réluctance

Alessandro SILVESTRINI, Xavier MININGER, Maya HAGE HASSAN, Guillaume KREBS, Philippe DESSANTE

Université Paris-Saclay, CentraleSupélec, Sorbonne Université, CNRS, GeePs, 91192, Gif-sur-Yvette, France

RESUME - Cet article présente une optimisation topologique multiphysique appliquée à la conception d'un moteur synchrone à réluctance (SynRM). Une optimisation magnéto-mécanique multi-étapes est menée pour assurer la robustesse mécanique du rotor. Deux différents algorithmes à gradient sont utilisés et les géométries optimisées associées sont comparées. Les fonctions objectifs sont formulées en considérant séquentiellement les énergies magnétiques obtenues dans les axes d-q, puis la souplesse mécanique.

Mots-clés—Optimisation topologique, machine synchrone à réluctance, méthode des éléments finis, multi-physique.

1. INTRODUCTION

L'optimisation topologique est une approche de conception visant à trouver la distribution optimale des matériaux dans un espace défini. Elle est différente des problèmes d'optimisation paramétrique qui nécessitent une géométrie initiale définie, et qui reposent donc sur l'expérience du concepteur. Au cours des dernières décennies, cette technique a été utilisée dans diverses disciplines d'ingénierie, notamment en électromagnétisme [1].

Dans cet article, l'optimisation topologique est appliquée à la conception du rotor d'un moteur synchro-réducteur. Dans la littérature, l'application de cette méthode aux machines électriques se concentre très généralement sur l'amélioration des performances magnétiques sans tenir compte des aspects mécaniques. Quelques articles récents proposent cependant de traiter une optimisation magnéto-mécanique [2]-[3]. Dans ces derniers, la fonction objectif du problème magnétostatique est généralement exprimée en terme de couple moyen. Dans [4], les auteurs proposent d'utiliser le rapport des énergies magnétiques dans les axes d et q pour améliorer la saillance de la machine. La fonction objectif proposée dans le présent article est exprimée par la différence entre les énergies magnétiques des axes $d-q$. Cette formulation revient à considérer directement le couple moyen, sans suivre l'approche classique qui nécessite la prise en compte des différentes positions du rotor, étape coûteuse en temps de calcul.

L'article décrit dans un premier temps l'optimisation magnétique. À partir de la géométrie optimale obtenue, une optimisation mécanique est ensuite formulée avec l'objectif d'augmenter la rigidité du rotor. Ces deux problèmes d'optimisation sont formulés à partir de la méthode de densité SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization). Deux algorithmes différents sont comparés pour la résolution du problème : *Generalized Optimality Criteria* (GOC) [5] et *Method of Moving Asymptotes* (MMA) [6]. De plus, le gradient

des fonctions objectif est déterminé en utilisant la méthode des variables adjointes.

2. PROBLEMES D'OPTIMISATION

La conception des machines synchro-réductrices présente un défi majeur en raison de la complexité de leur structure. Le processus de dimensionnement et d'optimisation implique un grand nombre de paramètres géométriques, plus précisément au niveau du rotor [7]. Le rotor est composé de barrières de flux ainsi que de ponts radiaux et tangentiels pour améliorer la robustesse mécanique de la structure. Afin d'obtenir les formes des barrières et la disposition des ponts, nous procédons dans le cadre de cette étude à l'optimisation topologique du rotor.

Dans cette démarche d'optimisation, la géométrie du stator est fixée et les principaux paramètres du moteur sont présentés dans le tableau 1. De ce fait, le problème multiphysique est appliqué au niveau de l'espace de conception Ω correspondant au rotor (Fig. 1).

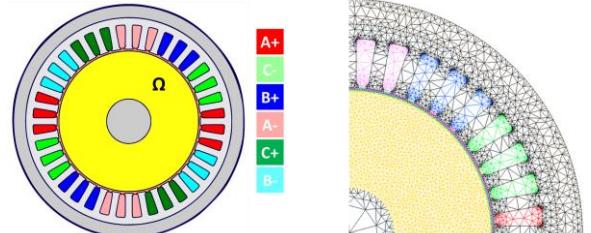


Fig. 1. Géométrie et maillage de la machine avec le domaine topologique Ω .

Tableau 1. SynRM paramètres.

Paramètre	Quantité
Nombre de pôles	4
Nombre d'encoches	36
Diamètre du stator	130 [mm]
Diamètre du rotor	78.75 [mm]
Entrefeur	1 [mm]
Diamètre de l'arbre	25 [mm]
Longueur	100 [mm]
Densité de courant	10 [A/mm ²]
Vitesse angulaire	10000 [rpm]
Module de Young	200 [MPa]
Densité de l'acier	7800 [kg/m ³]

Pour aborder le problème multiphysique, une approche en deux étapes est adoptée. Dans un premier temps, une optimisation

magnétique est menée sur l'ensemble du domaine Ω . Ensuite, la topologie magnétique optimale obtenue est utilisée comme point de départ pour une optimisation mécanique, afin d'assurer une conception structuralement robuste. Pour cette seconde étape, seules les barrières de flux constituées par les domaines d'air de la géométrie constituent le nouveau domaine de conception. Cette approche en deux étapes a pour avantage de simplifier la démarche de conception et constitue une première étape d'analyse du problème multiphysique. L'algorithme proposé est donné dans la Fig.2.

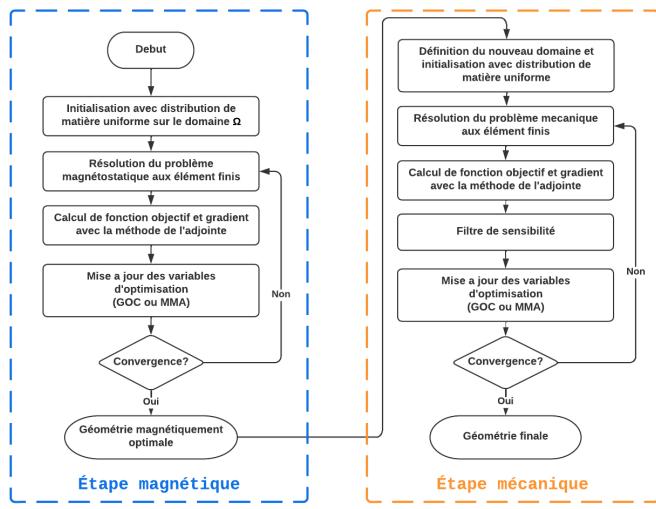


Fig. 2. Algorithme du problème d'optimisation multiphysique.

Les deux problèmes d'optimisation topologique qui seront présentés sont formulés avec la méthode de densité SIMP. La méthode SIMP a été décrite la première fois par [11] comme une méthode de reformulation du problème à variables discrètes 0-1 en variables continues. Cette méthode s'est substituée aux approches d'homogénéisation, la caractéristique matériau d'un élément du maillage est exprimée à partir d'une variable de densité qui est pénalisée pour éviter l'apparition d'éléments avec des propriétés matériau intermédiaires. Un algorithme d'optimisation est ensuite utilisé pour trouver la distribution de matière optimale qui minimise une fonction objectif tout en tenant compte des différentes contraintes.

Les méthodes de densité ont cependant des comportements non souhaités [8], comme l'apparition des zones de damiers (« checkerboards ») ou le problème de minimums locaux comme c'est le cas de toute méthode à base de gradient. Concernant les damiers, ce sont des structures d'éléments connectés uniquement par leurs sommets. Ces structures n'ont pas vraiment de sens physique et sont surtout présentes dans les problèmes mécaniques, et moins dans les problèmes électromagnétiques. A propos des minimums locaux, ils sont liés à la non-convexité du problème d'optimisation. Pour réduire ces comportements non souhaités, une des solutions est de faire appel à des filtres. Dans cette étude, le filtrage est ainsi utilisé uniquement dans le problème d'optimisation mécanique. Le filtre implémenté est un filtrage pour la sensibilité au maillage et la formulation sera donnée dans la section du problème mécanique. De plus, deux différents algorithmes sont choisis pour la résolution du problème et la non-unicité des solutions due aux multiples optimums sera discutée dans le résultat final.

2.1. Problème d'optimisation magnétostatique

La fonction objectif du problème magnétostatique est exprimée par la différence des énergies magnétiques W_d et W_q . En se basant sur la formulation du couple moyen (1), une reformulation est proposée en se basant sur une différence d'énergie obtenue grâce à deux angles de courant 0° et 90° .

$$L_d \simeq \frac{2W_d}{I_d^2} \quad L_q \simeq \frac{2W_q}{I_q^2} \quad (1)$$

$$T_e = \frac{3}{2} p (L_d - L_q) i_d i_q$$

où p est le nombre de paires de pôles, L_d , i_d et L_q , i_q sont les inductances de l'axe d et q et les courants respectifs. Cette approche élimine la nécessité des calculs pour différents angles du rotor et réduit considérablement le temps de calcul. Pour déterminer les deux énergies, les bobinages sont alimentés respectivement par des courants d'axe d et d'axe q , avec une densité de courant de 10 A/mm^2 . Cette valeur de courant a été choisie pour garantir un fonctionnement en condition de saturation magnétique pendant l'optimisation. Une contrainte est imposée sur le volume maximum de matière à l'intérieur du domaine. Le problème d'optimisation est formulé par :

$$\min_{\rho} F(\rho) = -(W_d(\rho) - W_q(\rho))$$

$$\text{s. c. } \sum_{e=1}^{N_{elem}} \rho_e V_e \leq V_{\max_mag} \quad (2)$$

$$0.001 \leq \rho_e \leq 1$$

où ρ représente les variables de conception, ρ_e la densité dans un élément e du maillage, V_e son volume, N_{elem} le nombre total d'éléments du domaine topologique (égal ici à 8712) et V_{\max_mag} le volume maximal, fixé ici à 55%. En règle générale, le noyau du rotor d'un SynRM est constitué de tôles laminées qui occupent entre 50 % et 80 % du volume du rotor, selon la conception et l'application du moteur. Dans cette étude, la contrainte de volume est choisie pour le besoin d'obtenir un moteur léger.

Le problème magnétostatique 2D est formulé en potentiel vecteur magnétique A et développé sous Matlab. Le comportement non linéaire de la caractéristique $B=f(H)$ est approximé par l'expression de Marrocco [9]. Le problème magnétique discréte s'exprime alors par :

$$K_m(A)A = J \quad (3)$$

où, K_m est la matrice de rigidité magnétique qui inclut la non-linéarité du matériau et J est le vecteur densité de courant. Comme la variable de densité ρ_e est comprise dans un intervalle continu, la reluctivité dans le domaine d'optimisation est interpolée de sorte que :

$$\nu_e = \nu_0 + (\nu_f(b_e) - \nu_0)\rho_e \quad (4)$$

où ν_e , ν_0 et ν_f sont respectivement la reluctivité dans l'élément e , de l'air et du matériau ferromagnétique, et b_e l'induction magnétique dans l'élément e .

Le gradient de la fonction objectif doit être ensuite calculé, il est obtenu à l'aide de la méthode des variables adjointes et il est formulé de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\rho)}{\partial \rho} &= \frac{\partial(-W_d + W_q)}{\partial \rho} \Big|_{A=const} \\ &+ \lambda_d^T \frac{\partial(K_m(A_d)A_d - J_d)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=const} \\ &+ \lambda_q^T \frac{\partial(K_m(A_q)A_q - J_q)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=const} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{avec } \lambda \left(\frac{\partial(K_m(A)A - J)}{\partial A} \right) = - \frac{\partial W}{\partial A} \Big|_{\rho=const} \quad (6)$$

où, λ est le vecteur qui représente la variable adjointe.

2.2. Problème d'optimisation mécanique

Les résultats du problème d'optimisation magnétostatique sont présentées sur la Fig. 3 avec les algorithmes GOC et MMA. La géométrie optimale obtenue lors de l'optimisation magnétostatique est alors utilisée comme design initial pour le problème mécanique. Le nouvel espace d'optimisation est formé par les régions d'air des barrières de flux (Fig. 3).

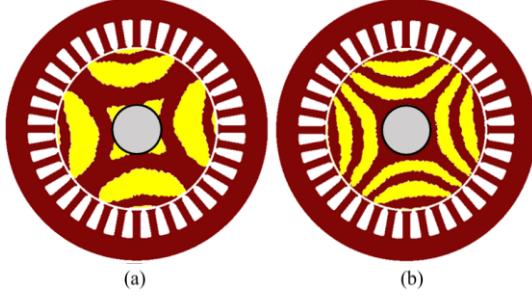


Fig. 3. Domaine d'optimisation mécanique, avec les algorithmes GOC (a) et MMA (b).

La géométrie du rotor doit être conçue pour résister aux charges structurelles. Ces charges sont générées par la vitesse de rotation, dans cette étude égale à 10000 rpm. Dans cette étape, afin d'arriver à une géométrie robuste, une analyse mécanique est réalisée. Puis, la souplesse $C(\rho)$ (ou "compliance" en anglais) est évaluée comme suit :

$$C(\rho) = (F(\rho))^T u = u^T K_s(\rho) u \quad (7)$$

où, K_s est la matrice de rigidité globale et u le vecteur global des déplacements nodaux. Le second membre du problème mécanique ($F(\rho)$) correspond aux forces inertielles élémentaires F_e . Ces forces sont dépendantes de la densité élémentaire ρ_e et agissent le long de la direction radiale :

$$F_e = \rho_e m_e r_e \omega^2 \quad (8)$$

avec m_e la masse de l'élément (liée à la densité de l'acier), r_e la distance par rapport au centre de rotation et ω la vitesse angulaire.

Comme dans le problème précédent, ρ_e est comprise dans un intervalle continu. L'équation constitutive du matériau est exprimée par une interpolation du module de Young :

$$E_e = E_{min} + (E_{fe} - E_{min})\rho_e^q \quad (9)$$

où E_{fe} est le module de Young du matériau ferromagnétique, E_{min} une valeur minimale imposée et q le facteur de pénalisation, ici égal à 3.

Pour un problème d'optimisation topologique, la minimisation des déplacements s'obtient par la maximisation de la rigidité globale. Cette optimisation revient aussi à minimiser la compliance C de la pièce. Une contrainte sur le volume est toujours imposée et le problème d'optimisation est formulé par :

$$\begin{aligned} \min_{\rho} C(\rho) &= u^T K_s(\rho) u \\ \text{s. c. } \sum_{e=1}^{N_{air}} \rho_e V_e &\leq V_{\max_mec} \end{aligned} \quad (10)$$

$$0.001 \leq \rho_e \leq 1$$

C est la compliance du rotor, N_{air} le nombre total d'éléments de maillage de l'air (4099 pour GOC et 4119 pour MMA) et V_{\max_mec} le volume maximal du matériau à ajouter, fixé ici à 4 % du nouvel espace d'optimisation. Le gradient de la fonction objectif est aussi obtenu à l'aide de la méthode des variables adjointes. Le gradient est formulé de la façon suivante :

$$\frac{\partial C(\rho)}{\partial \rho} = -u^T \frac{\partial K_s}{\partial \rho} u + 2u^T \frac{\partial F}{\partial \rho} \quad (11)$$

Une fois le gradient calculé, la formulation du gradient filtré est donnée par :

$$\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial \rho_e} = \frac{\sum_{i \in N_e} w(x_i) \rho_i \frac{\partial F}{\partial \rho_i} / v_i}{\rho_e / v_e \sum_{i \in N_e} w(x_i)} \quad (12)$$

Dans cette équation, N_e représente l'ensemble des éléments voisins de l'élément e , ρ_i est la densité du voisin i , v_i est le volume de l'élément i et $w(x_i)$ est une fonction de pondération qui dépend de la distance entre l'élément de voisinage i et l'élément cible e . La fonction $w(x_i)$ est définie par :

$$w(x_i) = 1 - \|x_i - x_e\| / r_{filtre} \quad (13)$$

où, r_{filtre} est un paramètre, choisi ici égal à 3 mm, qui définit la taille du voisinage et $\|x_i - x_e\|$ représente la distance entre le centre de l'élément i et le centre de l'élément e . Par conséquent, la taille de l'ensemble N_e dépend du paramètre r_{filtre} . Ce rayon doit être choisi en fonction de la taille du maillage.

$$N_e = \{i \text{ tel que } \|x_i - x_e\| \leq r_{filtre}\} \quad (14)$$

Le filtre est appliqué pour garantir une solution réalisable et éviter la formation de motifs de damiers [10]. Le problème multiphysique est finalement résolu et les résultats correspondants sont présentés dans la section suivante.

3. COMPARAISON DES RESULTATS

Les machines optimisées avec les deux algorithmes sont présentées sur la Fig. 4. Le même algorithme est utilisé dans le cas magnétique et le cas mécanique. Les résultats sont résumés dans le tableau 2, permettant la comparaison des compliances mécaniques, des couples moyens et des ondulations de couple ΔC .

$$\Delta C = \frac{C_{max} - C_{min}}{C_{moyen}} \cdot 100 \quad (15)$$

Pour analyser le comportement magnétique de la machine, le couple moyen est déterminé en post-traitement par la moyenne de ses valeurs instantanées calculées avec la méthode d'Arkkio [12]. La rotation du rotor est possible grâce à une bande de mouvement dans l'entrefer. Un angle de courant optimal a été déterminé a posteriori de l'optimisation.

Tableau 2. Comparaison des résultats obtenus avec les deux algorithmes d'optimisation GOC et MMA.

Algorithm	Énergie magnétique [J]	Compliance	C_{moyen} [N.m]	ΔC
GOC (mag)	0.0410	7.46×10^6	21.25	42%
MMA (mag)	0.0406	2.04×10^6	23.04	31%
GOC (meca)	0.0378	0.263	17.73	37%
MMA (meca)	0.0389	0.488	18.97	22%

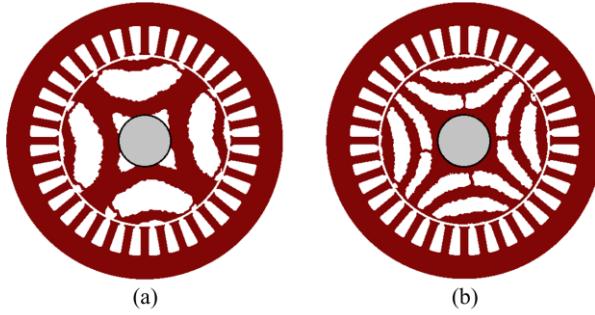


Fig. 4. Résultats de l'optimisation multiphysique avec les algorithmes GOC (a) et MMA (b).

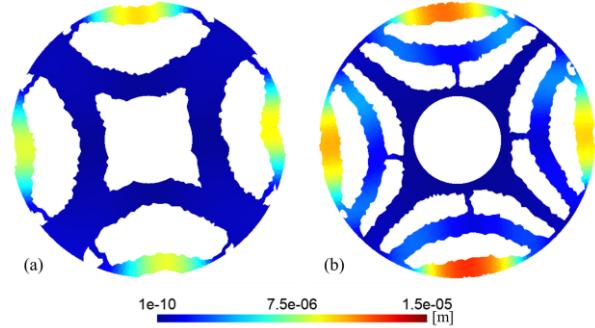


Fig. 5. Déplacements (statiques) en mètres des rotors obtenus avec GOC (a) et MMA (b).

Les ponts réduisent la compliance du rotor et limitent la déformation maximale au niveau de l'entrefer due aux forces centrifuges, Fig. 5. Cependant, les performances magnétiques sont affectées négativement par la présence de ces ponts. Il faut alors envisager un compromis entre les performances magnétiques et mécaniques.

Le problème des méthodes à gradient, dans notre cas SIMP, est la présence des minimum locaux. Ceci est bien visible dans les résultats finaux des optimisations magnétiques, Fig. 3. Deux algorithmes d'optimisation ont été utilisés pour l'optimisation, GOC et MMA. A partir du même point de départ les algorithmes n'ont pas convergés vers la même solution (Fig. 4).

Une loi d'évolution a aussi pu être observée entre la contrainte sur le volume et la compliance, le couple moyen et l'épaisseur des ponts. Les résultats de cette analyse sont montrés dans le tableau 3. Nous avons fait varier la contrainte sur le volume entre 3% et 15% et pour chaque géométrie obtenue le couple moyen a été calculé et l'épaisseur des ponts mesurée. Les

résultats montrés ont été obtenus avec l'algorithme GOC et le même comportement a été observé avec l'algorithme MMA.

Tableau 3. Comparaison des performances pour différentes valeurs de contraintes mécaniques V_{max_mec} pour des optimums trouvés par l'algorithme GOC.

V_{max_mec}	Compliance	C_{moyen} [N.m]	Epaisseur ponts [mm]
3%	0.345	18.37	1
4%	0.263	17.73	1-1.5
5%	0.251	17.20	1.5
6%	0.213	16.89	1.5-2
7%	0.171	15.72	2
8%	0.154	14.91	2-3
9%	0.139	14.22	2-3
10%	0.128	13.52	3-4
11%	0.118	13.37	1-4
12%	0.109	12.78	1-4
13%	0.100	12.54	1-4
14%	0.095	11.62	1-5
15%	0.091	11.04	1-5

Ces résultats soulignent la corrélation inverse entre la compliance et le couple moyen. En effet, la compliance étant l'inverse de la rigidité, à mesure que la contrainte sur le volume augmente, la structure devient plus rigide au détriment du couple. L'épaisseur des ponts augmente aussi, avec des valeurs entre 1 et 5 mm. En tenant compte des dimensions du rotor et des déplacements de l'ordre de 10^{-2} mm, une épaisseur entre 1 et 2 mm est suffisante. La contrainte V_{max_mec} comprise entre 3% et 5% semble être le bon compromis entre performance magnétique et tenue mécanique.

4. CONCLUSIONS

Dans cet article, une optimisation topologique multiphysique a été appliquée sur une machine SynRM. Deux algorithmes ont été utilisés et les performances des géométries obtenues comparées. Ils ont fait ressortir le compromis à faire entre les performances magnétiques et mécaniques. Les perspectives concernent le développement d'une optimisation du problème magnéto-mécanique résolu simultanément. Une autre perspective est de réaliser une optimisation topologique vibratoire sur le stator, en tenant compte des forces magnétiques générées dans l'entrefer.

Il faut noter enfin que bien que la procédure d'optimisation ne donne pas des résultats totalement symétriques dans le détail. Ce point pourra lui aussi faire l'objet d'une étude plus poussée dans le futur

5. REFERENCES

- [1] F. Lucchini, R. Torchio, V. Cirimele, P. Alotto, and P. Bettini, "Topology Optimization for Electromagnetics: A Survey", IEEE Access, vol. 10, pp. 98593-98611, 2022.
- [2] C. Lee, J. Lee and I. G. Jang, "Topology Optimization for the Manufacturable and Structurally Safe Synchronous Reluctance Motors With Multiple Iron Webs and Bridges", IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 70, no. 1, pp. 678-687, Jan. 2023.
- [3] F. Guo and I. P. Brown, "Simultaneous Magnetic and Structural Topology Optimization of Synchronous Reluctance Machine Rotors", IEEE Transactions on Magnetics, vol. 56, no. 10, pp. 1-12, Oct. 2020.
- [4] M. Hage Hassan, T. Guillemot, X. Mininger, G. Krebs, A. Boumesbah, P. Dessante, "Fast multi-material discrete topology optimization for the design of electrical machines", IEEE International Magnetics Conference (INTERMAG), 2021.

- [5] N. H. Kim, T. Dong, D. Weinberg, and J. Dalidd, "Generalized Optimality Criteria Method for Topology Optimization", *Applied Sciences* 11, no. 7: 3175, 2021.
- [6] K. Svanberg, "The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, 359-373, 1987.
- [7] M. Murataliyev, M. Degano, M. Di Nardo, N. Bianchi and C. Gerada, "Synchronous Reluctance Machines: A Comprehensive Review and Technology Comparison," in *Proceedings of the IEEE*, vol. 110, no. 3, pp. 382-399, March 2022.
- [8] O. Sigmund, J. Petersson, "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima." *Structural Optimization* 16, 68-75, 1998.
- [9] A. Marrocco, "Analyse numérique de problèmes d'électrotechnique." *Ann. Sc. Math. Québec*, 1(2):271–296, 1977.
- [10] O. Sigmund, "Morphology-based black and white filters for topology optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 33. 401-424, 2007.
- [11] M. P. Bendsøe, N. Kikuchi. "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 71.2: 197-224, 1988.
- [12] N. Sadowski, Y. Lefevre, M. Lajoie-Maznec and J. Cros, "Finite element torque calculation in electrical machines while considering the movement", *IEEE Trans. Magn.*, 28(2)/1410-1413, 1992.