

Modèle analytique générique de courant incluant la saturation pour une machine synchrone à aimants permanents

Salma BENHARREF

Laboratoire ROBERVAL,

Université de Technologie de Compiègne

Vincent LANFRANCHI

Laboratoire ROBERVAL,

Université de Technologie de Compiègne

Daniel DEPERNET

FEMTO-ST Institute,

UTBM, CNRS, Belfort

Tahar HAMITI

NIDEC PSA emoteurs-Département R&D

212 Boulevard Pelletier, 78955 Carrières-sous-Poissy

Sara BAZHAR

NIDEC PSA emoteurs-Département R&D

212 Boulevard Pelletier, 78955 Carrières-sous-Poissy

RESUME – Cet article présente un modèle analytique générique qui permet de reproduire les courants statoriques d'une machine synchrone à aimants permanents (MSAP) en incluant la saturation et l'effet de la saturation croisée. Ce modèle est générique contrairement aux modèles déjà existants, non limité en fréquence, et inclut le calcul des phases des harmoniques, ce qui permet d'obtenir les formes d'ondes de courant pour n'importe quelle MLI. De tels résultats permettent par la suite d'évaluer les pertes fer, l'ondulation de couple ou encore le bruit généré.

Mots-clés – harmoniques de courant, MSAP, transformation de Park, modèle dq, saturation magnétique, MLI, saturation croisée

1. INTRODUCTION

Aujourd'hui, les fabricants de machines électriques dans le secteur automobile sont contraint de fabriquer des machines à haute efficacité énergétique et qui génèrent le minimum de bruit magnétique. Dans ce cadre, nous étudions l'impact des harmoniques liés à la MLI sur une MSAP triphasée commandée par un onduleur à deux niveaux de tension. En effet, les harmoniques de tension engendrent des harmoniques de courant qui contribuent à augmenter les pertes magnétiques (pertes par courants de Foucault et pertes par hystérésis) [1] et à détériorer le couple [2]. Ces harmoniques vont aussi générer des harmoniques de pressions magnétiques et donc du bruit s'ils excitent des résonances de la structure mécanique de la machine [3, 4, 5]. Il est donc nécessaire d'évaluer ces harmoniques pour pouvoir prédire leurs impacts sur la machine, et une méthode analytique permettrait d'accélérer les calculs. Des modèles analytiques permettant de calculer les harmoniques de courant à partir de modèle dq linéaire [6] (n'incluant pas la saturation) et non linéaire [7] (incluant la saturation et l'effet de saturation croisée) pour des machines synchrones à aimants permanents existent déjà. Ces deux modèles ne permettent de calculer que des harmoniques spécifiques de courant ($f_s \pm 2f_e$, $f_s \pm 4f_e$, $2f_s \pm f_e$, $2f_s \pm 5f_e$ et $2f_s \pm 7f_e$ avec f_s la fréquence de commutation et f_e la fréquence du fondamental) à partir d'harmoniques de tension spécifiques à la MLI vectorielle (SVPWM) [8]. De plus, le modèle proposé dans [7] qui inclut la saturation, ne permet pas de calculer les phases des harmoniques de courant. Ainsi, nous proposons un modèle générique, non limité à deux fois la fréquence de commutation et qui permet d'obtenir les formes d'ondes de courant. Ces formes d'ondes peuvent ensuite être injectées dans un logiciel d'analyse par éléments finis pour réaliser des calculs magnétiques.

La méthode générale basée sur la transformation de Park utilisée dans [6] et [7] est celle utilisée dans le modèle proposé. Mais, dans le modèle analytique décrit dans cet article, un har-

monique de tension quelconque (amplitude, fréquence et phase quelconques) est étudié au lieu d'harmoniques spécifiques, ce qui permet d'avoir un résultat générique.

Des modèles de courant basés sur un modèle linéaire de la machine et sur un modèle linéarisé utilisant les inductances incrémentales sont d'abord développés avant l'utilisation d'un modèle non linéaire de la machine. Les résultats obtenus avec les trois modèles sont comparés aux résultats expérimentaux.

2. IMPACT DES HARMONIQUES DE LA MLI SUR LE COMPORTEMENT VIBRO-ACOUSTIQUE DE LA MACHINE

La MLI crée des harmoniques de tension et de courant autour de fréquences multiples de la fréquence de commutation. Ces harmoniques de courant vont ensuite générer des harmoniques de force magnétomotrice statorique :

$$Fmm_s(t, \theta) = \sum_{q=1}^{q_s} N_s^{(q)}(\theta) \cdot i_s^{(q)}(t) \quad (1)$$

Avec q_s le nombre de phases et $N_s^{(q)}$ la fonction de bobinage. Les harmoniques de force magnétomotrice statorique liés à la MLI sont d'ordre spatial p (nombre de paires de pôles) et de fréquence égale à la fréquence MLI ($f_{MLI} = m f_s \pm n f_e$, avec m et n des entiers de parité différente).

Les harmoniques de force magnétomotrice statorique, combinés avec des harmoniques de perméance vont créer des harmoniques de flux magnétique car on a :

$$B = \lambda Fmm \quad (2)$$

Avec λ la perméance, et B l'induction magnétique.

Et enfin, la combinaison de deux harmoniques de flux magnétique va générer un harmonique de force magnétique. On peut décomposer les pressions magnétiques radiales et tangentielles comme suit :

$$\begin{aligned} \delta_r(\theta, t) &= ((B_r^r + B_r^s)^2 - (B_t^r + B_t^s)^2) / 2\mu_0 \\ \delta_t(\theta, t) &= (B_r^r + B_t^s)(B_t^r + B_r^s) / \mu_0 \end{aligned} \quad (3)$$

Avec $B_{r,t}^r$ l'induction radiale/tangentielle rotorique et $B_{r,t}^s$ l'induction radiale/tangentielle statorique.

Les principaux harmoniques de flux magnétique liés à la MLI proviennent de la combinaison des harmoniques de force magnétomotrice d'ordre spatial p et de fréquence f_{MLI} avec la

composante continue spatiale et temporelle de perméance.

La combinaison de ces harmoniques de flux avec le fondamental de flux d'ordre spatial p et de fréquence f_e , va générer les principaux harmoniques de force magnétique liés à la MLI d'ordre spatial $p \pm p$ et de fréquence $f_{MLI} \pm f_e$. Autour de ces harmoniques, on retrouve des harmoniques dus à l'interaction entre les principaux harmoniques de flux liés à la MLI avec les harmoniques de denture. Le détail des harmoniques de force magnétique est expliqué dans [9] et [10].

Une meilleure connaissance des harmoniques de courant permet la prédiction du comportement vibro-acoustique de la machine.

3. HARMONIQUES DE TENSION

N'importe quel harmonique de tension peut être exprimé dans le repère abc comme suit après avoir appliqué la double intégrale de Fourier comme expliqué dans [11] :

$$H_{mn} = A_{mn} \cos((m\omega_s + n\omega_e)t) + B_{mn} \sin((m\omega_s + n\omega_e)t) \quad (4)$$

Avec m l'ordre lié à la porteuse, n l'ordre lié à la modulante, ω_s la pulsation de commutation et ω_e la pulsation électrique liée au fondamental. Pour cet article, nous avons utilisé l'expression analytique des harmoniques de tension liés à la SVPWM qui sont détaillées dans [11] pour valider le modèle, mais un autre type de MLI aurait pu être utilisé. L'expression analytique est la suivante :

$$u_H = A_{mn} \cos((m\omega_s + n\omega_e)t) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{mn} = & \frac{8V_{dc}}{m\pi^2} \left[\frac{\pi}{6} \sin((m+n)\frac{\pi}{2}) \left(J_n(m\frac{3\pi}{4}M) + 2 \cos n\frac{\pi}{6} \right. \right. \\ & \times J_n(m\frac{\sqrt{3}\pi}{4}M) \Big) + \frac{1}{n} \sin m\frac{\pi}{2} \cos n\frac{\pi}{2} \sin n\frac{\pi}{6} \left(J_0(m\frac{3\pi}{4}M) \right. \\ & \left. \left. - J_0(m\frac{\sqrt{3}\pi}{4}M) \right) \right]_{n \neq 0} + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq -n)}}^{\infty} \left(\frac{1}{n+k} \sin((m+k)\frac{\pi}{2}) \right. \\ & \times \cos((n+k)\frac{\pi}{2}) \sin((n+k)\frac{\pi}{6}) \left[J_k(m\frac{3\pi}{4}M) \right. \\ & \left. + 2 \cos((2n+3k)\frac{\pi}{6}) J_k(m\frac{\sqrt{3}\pi}{4}M) \right] \Big) + \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq n)}}^{\infty} \left(\frac{1}{n-k} \right. \\ & \times \sin((m+k)\frac{\pi}{2}) \cos((n-k)\frac{\pi}{2}) \sin((n-k)\frac{\pi}{6}) \left[J_k(m\frac{3\pi}{4}M) \right. \\ & \left. \left. + 2 \cos((2n-3k)\frac{\pi}{6}) J_k(m\frac{\sqrt{3}\pi}{4}M) \right] \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Avec J_k , la fonction de Bessel d'ordre k , M l'indice de modulation ($M = \frac{V_1}{V_{dc}}$, avec V_1 l'amplitude du fondamental et $2V_{dc}$ la tension d'alimentation totale), m l'ordre harmonique lié à la porteuse et n l'ordre harmonique lié à la modulante.

4. MODÈLE LINÉAIRE (INDUCTANCES APPARENTES)

4.1. Expression des harmoniques de tension dans le repère dq

Le premier modèle de courant établi est un modèle basé sur un modèle linéaire de la machine. L'expression générique de l'équation 4 est utilisée pour exprimer les harmoniques de tension dans le repère dq à l'aide de la transformation de Park qui est la suivante :

$$\begin{aligned} u_d &= \frac{2}{3} (u_a \cos \theta + u_b \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + u_c \cos(\theta - \frac{4\pi}{3})) \\ u_q &= -\frac{2}{3} (u_a \sin \theta + u_b \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) + u_c \sin(\theta - \frac{4\pi}{3})) \quad (7) \\ u_0 &= 0 \end{aligned}$$

Avec $\theta = \omega_e t - \phi_0$. On considère que l'origine du repère abc est le fondamental de tension V_s .

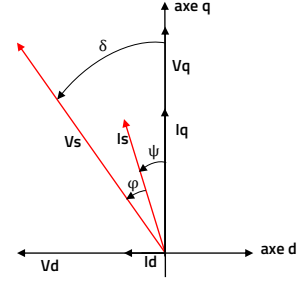


FIG. 1. Diagramme de Fresnel

On a alors, d'après la figure 1 :

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2} + \delta \quad \tan \delta = \frac{-V_d}{V_q} = \frac{L_q \omega_e I_q - R_s I_d}{R_s I_q + L_d \omega_e I_d + \Psi_R \omega_e} \quad (8)$$

Les deux harmoniques de tension $H_{m,3n-1}$ et $H_{m,3n+1}$ (avec m et n de même parité) dans le repère abc conduisent à un seul harmonique $H_{m,3n}$ dans le repère dq. La transformation de Park sera donc appliquée pour les deux harmoniques de tension $H_{m,3n-1}$ et $H_{m,3n+1}$. Après avoir appliqué la transformation de Park pour les deux harmoniques de tension $H_{m,3n-1}$ et $H_{m,3n+1}$ et après avoir combiné les résultats obtenus, on obtient :

$$u_{d(m,\pm 3n)} = U_{d(m,\pm 3n)} \cos((m\omega_s \pm 3n\omega_e)t + \phi_{d(m,\pm 3n)}) \quad (9)$$

L'amplitude et la phase de l'harmonique sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} U_{d(m,\pm 3n)}^2 &= A_{m,3n-1}^2 + A_{m,3n+1}^2 + 2A_{m,3n-1}A_{m,3n+1} \cos 2\phi_0 \\ &+ B_{m,3n-1}^2 + B_{m,3n+1}^2 + 2B_{m,3n-1}B_{m,3n+1} \cos 2\phi_0 \\ &\pm 2A_{m,3n-1}B_{m,3n+1} \sin 2\phi_0 \mp 2A_{m,3n+1}B_{m,3n-1} \sin 2\phi_0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_{d(m,\pm 3n)} &= \left(-B_{m,3n-1} \cos \phi_0 - B_{m,3n+1} \cos \phi_0 \right. \\ &\left. \mp A_{m,3n-1} \sin \phi_0 \pm A_{m,3n+1} \sin \phi_0 \right) / U_{d(m,\pm 3n)} \\ \cos \phi_{d(m,\pm 3n)} &= \left(A_{m,3n-1} \cos \phi_0 + A_{m,3n+1} \cos \phi_0 \right. \\ &\left. \mp B_{m,3n-1} \sin \phi_0 \pm B_{m,3n+1} \sin \phi_0 \right) / U_{d(m,\pm 3n)} \end{aligned} \quad (11)$$

De la même manière, on a pour la tension u_q :

$$u_{q(m,\pm 3n)} = \pm U_{q(m,\pm 3n)} \sin((m\omega_s \pm 3n\omega_e)t + \phi_{q(m,\pm 3n)}) \quad (12)$$

Avec :

$$\begin{aligned} U_{q(m,\pm 3n)}^2 &= A_{m,3n-1}^2 + A_{m,3n+1}^2 - 2A_{m,3n-1}A_{m,3n+1} \cos 2\phi_0 \\ &+ B_{m,3n-1}^2 + B_{m,3n+1}^2 - 2B_{m,3n-1}B_{m,3n+1} \cos 2\phi_0 \\ &\mp 2A_{m,3n-1}B_{m,3n+1} \sin 2\phi_0 \pm 2A_{m,3n+1}B_{m,3n-1} \sin 2\phi_0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_{q(m,\pm 3n)} &= \left(\pm A_{m,3n-1} \sin \phi_0 + B_{m,3n-1} \cos \phi_0 \right. \\ &\left. \pm A_{m,3n+1} \sin \phi_0 - B_{m,3n+1} \cos \phi_0 \right) / U_{q(m,\pm 3n)} \\ \cos \phi_{q(m,\pm 3n)} &= \left(\pm B_{m,3n-1} \sin \phi_0 - A_{m,3n-1} \cos \phi_0 \right. \\ &\left. + A_{m,3n+1} \cos \phi_0 \pm B_{m,3n+1} \sin \phi_0 \right) / U_{q(m,\pm 3n)} \end{aligned} \quad (14)$$

4.2. Expressions des harmoniques de courant dans le repère dq

Pour exprimer les harmoniques de courant dans le repère dq, on utilise un modèle linéaire de la machine. Le modèle utilisé est celui présenté dans [12] dans lequel on a :

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = Ri_s + \frac{d\Psi_s}{dt} + J\omega_e \Psi_s \quad (15)$$

Avec :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{matrice complexe unitaire})$$

$$\Psi_s = L_s i_s + \Psi_R$$

$$L_s = \begin{pmatrix} L_{dapp} & 0 \\ 0 & L_{qapp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Psi_d - \Psi_R}{i_d} & 0 \\ 0 & \frac{\Psi_q}{i_q} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Avec Ψ_R le flux rotorique défini dans le référentiel rotorique. Dans ce modèle, la saturation n'est pas prise en considération : on considère une relation linéaire entre le flux et le courant. L_s qui correspond ici à la matrice d'inductances apparentes et Ψ_R ne dépendent pas de i_s .

On obtient pour les harmoniques de tensions dans le repère dq, les résultats suivants :

$$u_s = Ri_s + J\omega_e L_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + J\omega_e \Psi_R \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_e \\ \omega_e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{dapp} & 0 \\ 0 & L_{qapp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + j\omega_\mu \begin{pmatrix} L_{dapp} & 0 \\ 0 & L_{qapp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_e \\ \omega_e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Avec ω_μ la pulsation liée à l'harmonique de courant $I_{m,3n}$ dans le repère dq :

$$\omega_\mu = m\omega_s + 3n\omega_e \quad (19)$$

Avec m et n de même parité.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned} u_d &= Ri_d + j\omega_\mu L_{dapp} i_d - \omega_e L_{qapp} i_q \\ u_q &= Ri_q + j\omega_\mu L_{qapp} i_q + \omega_e (L_{dapp} i_d + \Psi_R) \end{aligned} \quad (20)$$

Dans l'équation 20, on peut négliger les termes R et ω_e par rapport à ω_μ étant donné que la fréquence de commutation est en général largement supérieure à la fréquence fondamentale électrique. Dans notre cas, la fréquence de commutation est égale à $13300Hz$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} i_{d\omega_\mu} &\approx \frac{u_{d\omega_\mu}}{j\omega_\mu L_{dapp}} \\ i_{q\omega_\mu} &\approx \frac{u_{q\omega_\mu}}{j\omega_\mu L_{qapp}} \end{aligned} \quad (21)$$

$$i_{d(m,3n)} \approx \frac{U_{d(m,3n)} \sin((m\omega_s + 3n\omega_e)t + \phi_{d(m,3n)})}{(m\omega_s + 3n\omega_e) L_{dapp}} \quad (22)$$

$$i_{q(m,3n)} \approx -\frac{U_{q(m,3n)} \cos((m\omega_s + 3n\omega_e)t + \phi_{q(m,3n)})}{(m\omega_s + 3n\omega_e) L_{qapp}} \quad (23)$$

4.3. Expressions des harmoniques de courant dans le repère abc

La dernière étape consiste à utiliser la transformation de Park inverse pour exprimer les harmoniques de courant dans le repère abc :

$$i_a = i_d \cos \theta - i_q \sin \theta \quad (24)$$

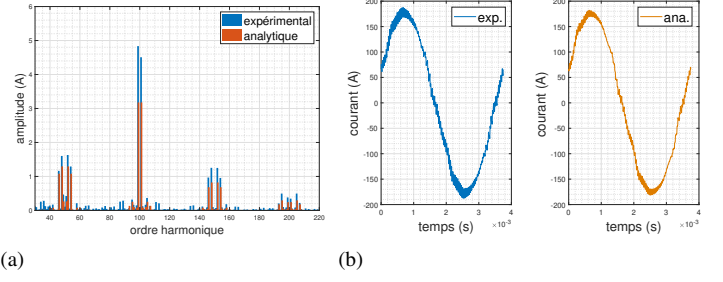


FIG. 2. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM/ 40Nm (modèle linéaire)

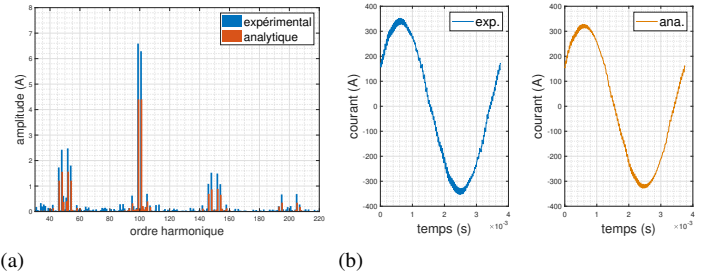


FIG. 3. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM/ 80Nm (modèle linéaire)

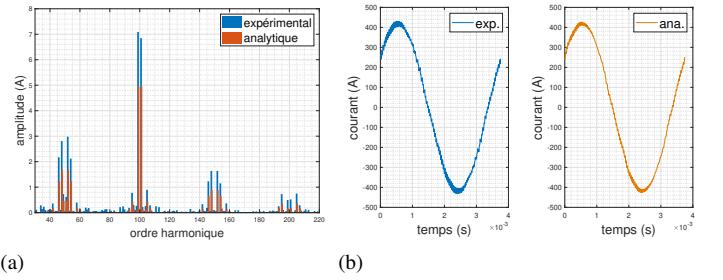


FIG. 4. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM/ 100Nm (modèle linéaire)

Après avoir appliqué la transformation de Park inverse, on peut séparer les résultats en deux résultats liés aux harmoniques de courant $I_{m,3n-1}$ et $I_{m,3n+1}$. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$i_{s(m,(3n\pm 1))} = I_{s(m,(3n\pm 1))} \cos((m\omega_s + (3n \pm 1)\omega_e)t + \phi_{s(m,(3n\pm 1))}) \quad (25)$$

Où les phases et les amplitudes sont exprimées comme suit :

$$\begin{aligned} I_{s(m,(3n\pm 1))}^2 &= \frac{1}{4\omega_\mu^2 L_{dapp}^2 L_{qapp}^2} \left[\left(L_{qapp} U_{d(m,3n)} (-\cos \phi_{d(m,3n)} \cos \phi_0 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \mp \sin \phi_{d(m,3n)} \sin \phi_0) + L_{dapp} U_{q(m,3n)} (-\sin \phi_{q(m,3n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sin \phi_0 \mp \cos \phi_{q(m,3n)} \cos \phi_0) \right)^2 + \left(L_{qapp} U_{d(m,3n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\sin \phi_{d(m,3n)} \cos \phi_0 \mp \cos \phi_{d(m,3n)} \sin \phi_0) + L_{dapp} U_{q(m,3n)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (-\cos \phi_{q(m,3n)} \sin \phi_0 \pm \sin \phi_{q(m,3n)} \cos \phi_0) \right)^2 \right] \quad (26) \end{aligned}$$

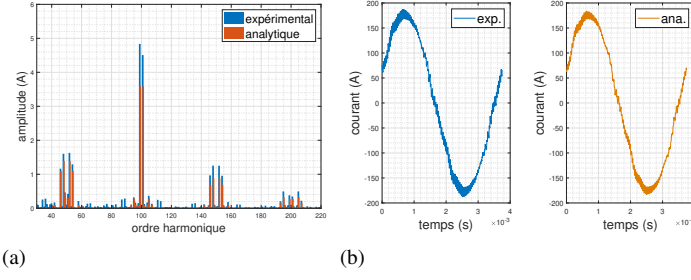


FIG. 5. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM/ 40Nm (modèle linéarisé avec inductances incrémentales)

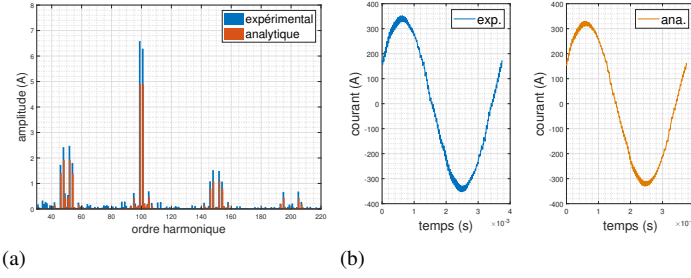


FIG. 6. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM/ 80Nm (modèle linéarisé avec inductances incrémentales)

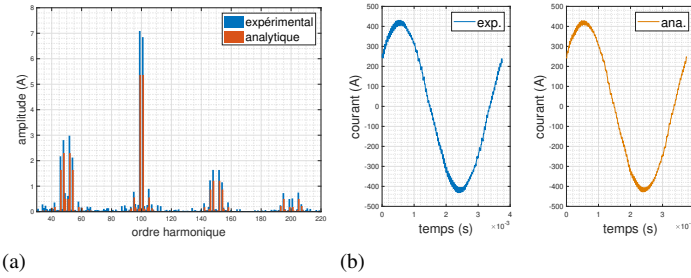


FIG. 7. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM/ 100Nm (modèle linéarisé avec inductances incrémentales)

$$\begin{aligned} \sin \phi_{s(m, (3n \pm 1))} &= \frac{1}{2\omega_\mu L_{dapp} L_{qapp}} \left(L_{qapp} U_{d(m, 3n)} (-\cos \phi_{d(m, 3n)} \right. \\ &\quad \times \cos \phi_0 \mp \sin \phi_{d(m, 3n)} \sin \phi_0) + L_{dapp} U_{q(m, 3n)} \\ &\quad \times (-\sin \phi_{q(m, 3n)} \sin \phi_0 \mp \cos \phi_{q(m, 3n)} \\ &\quad \times \cos \phi_0) \Big) / I_{s(m, (3n \pm 1))} \\ \cos \phi_{s(m, (3n \pm 1))} &= \frac{1}{2\omega_\mu L_{dapp} L_{qapp}} \left(L_{qapp} U_{d(m, 3n)} (\sin \phi_{d(m, 3n)} \right. \\ &\quad \times \cos \phi_0 \mp \cos \phi_{d(m, 3n)} \sin \phi_0) + L_{dapp} U_{q(m, 3n)} \\ &\quad \times (-\cos \phi_{q(m, 3n)} \sin \phi_0 \pm \sin \phi_{q(m, 3n)} \\ &\quad \times \cos \phi_0) \Big) / I_{s(m, (3n \pm 1))} \end{aligned} \quad (27)$$

Les harmoniques de courant $I_{m, -(3n+1)}$ et $I_{m, -(3n-1)}$ sont calculés à partir des harmoniques $I_{m, 3n+1}$ et $I_{m, 3n-1}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} i_{s(m, -(3n \pm 1))} &= -I_{s(m, 3n \pm 1)} \cos((m\omega_s - (3n \pm 1)\omega_e)t \\ &\quad - \phi_{s(m, (3n \pm 1))}) \end{aligned} \quad (28)$$

4.4. Discussion

A partir des figures 2(a), 3(a) et 4(a), on constate que globalement, les amplitudes des harmoniques obtenues à partir du modèle linéaire sont plus faibles que les amplitudes des harmoniques expérimentaux pour tous les points de fonctionnement considérés. D'après les figures 2(b), 3(b), et 4(b), l'ondulation de courant obtenue est elle aussi inférieure à l'ondulation des courants expérimentaux. L'erreur la plus grande commise, qui est autour de 45% concerne les harmoniques de premier rang (autour de l'harmonique 50) et de troisième rang (autour de l'harmonique 150) pour 4000 rpm/ 100 Nm qui constitue le point de fonctionnement le plus saturé des trois. Ces erreurs sont dues à la saturation : les inductances incrémentales diminuent avec l'augmentation du courant et donc du couple.

Les inductances apparentes ($L_x = \frac{\Psi_x}{i_x}$) utilisées dans le modèle linéaire sont alors dans la suite remplacées par des inductances incrémentales ($L_x = \frac{d\Psi_x}{di_x}$) afin de mieux définir le comportement dynamique de la machine.

5. MODÈLE DQ LINÉARISÉ UTILISANT LES INDUCTANCES INCRÉMENTALES

5.1. Modèle analytique

Pour se rapprocher de la réalité, il est nécessaire d'améliorer le modèle linéaire simplifié qui ne permet pas de donner une bonne estimation des harmoniques de courant. Le même modèle est utilisé (équations 15 à 18), mais dans ce cas, L_s et Ψ_R dépendent de i_s . A ce stade, l'effet de la saturation croisée est toujours négligé : effet du courant i_d sur le flux Ψ_q et l'effet du courant i_q sur le flux Ψ_d [13].

On a alors pour les harmoniques de tension :

$$\begin{aligned} u_d &= R i_d + j\omega_\mu L_{dinc} i_d - \omega_e L_{qapp} i_q \\ u_q &= R i_q + j\omega_\mu L_{qinc} i_q + \omega_e (L_{dapp} i_d + \Psi_R) \end{aligned} \quad (29)$$

En négligeant là encore R et ω_e par rapport à ω_μ , on obtient pour les harmoniques de courant :

$$\begin{aligned} i_{d\omega_\mu} &\approx \frac{u_{d\omega_\mu}}{j\omega_\mu L_{dinc}} \\ i_{q\omega_\mu} &\approx \frac{u_{q\omega_\mu}}{j\omega_\mu L_{qinc}} \end{aligned} \quad (30)$$

Les expressions analytiques des harmoniques de courant sont obtenues pour ce modèle en remplaçant les inductances apparentes du modèle linéaire (équations 26 et 27) par les inductances incrémentales.

5.2. Discussion

D'après les figures 5(a), 6(a) et 7(a), on constate que les amplitudes des harmoniques obtenus avec ce modèle sont globalement toujours inférieurs aux résultats expérimentaux, mais on constate une amélioration par rapport aux harmoniques obtenus avec le modèle linéaire (figure 2(a), 3(a) et 4(a)). Cela est dû au fait que les inductances incrémentales sont inférieures aux inductances apparentes sous saturation. Pour tous les points de fonctionnement les harmoniques de deuxième rang ont augmenté. Les autres harmoniques (harmoniques de premier et de troisième rang) ont augmenté le plus pour 4000 rpm/ 100 Nm étant donné qu'il s'agit du point de fonctionnement le plus saturé.

La plus grande erreur commise avec ce modèle sur les harmoniques prédominants est autour de 30% contre 45% avec le modèle linéaire précédent.

Les résultats peuvent tout de même être améliorés en incluant l'effet de la saturation croisée qui est introduite grâce aux inductances mutuelles M_{dq} et M_{qd} dans la section suivante.

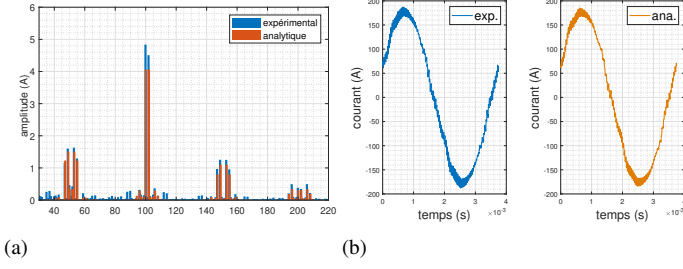


FIG. 8. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM / 40Nm (modèle non linéaire)

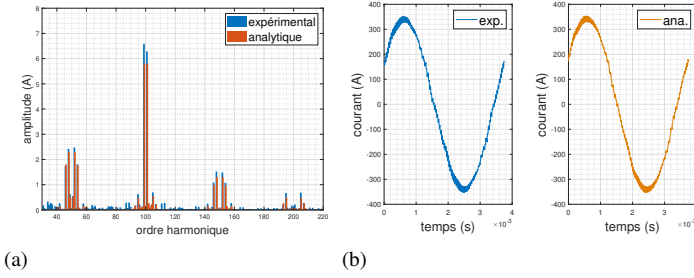


FIG. 9. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM / 80Nm (modèle non linéaire)

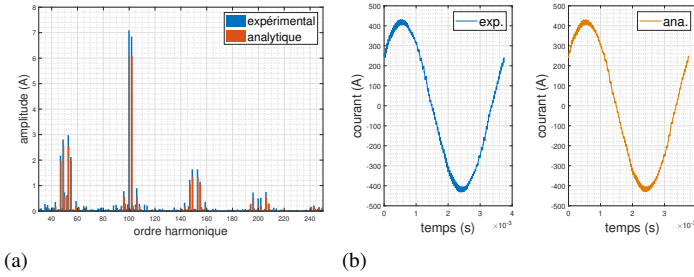


FIG. 10. Comparaison des (a) spectres et (b) formes d'ondes de courant pour 4000 RPM / 100Nm (modèle non linéaire)

6. MODÈLE NON LINÉAIRE

6.1. Modèle analytique

L'inclusion de l'effet de saturation croisée permet de prendre la saturation entièrement en compte.

Le modèle non linéaire [12, 14] peut être exprimé comme suit :

$$u_s = Ri_s + j\omega_e L_s i_s + Li \frac{di_s}{dt} + j\omega_e \Psi_R \quad (31)$$

Avec :

$$L_s = \begin{pmatrix} L_{dapp} & L_{dq} \\ L_{qd} & L_{qapp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Psi_d - \Psi_R}{i_d} & \frac{\Psi_d - \Psi_R}{i_q} \\ \frac{\Psi_q}{i_d} & \frac{\Psi_q}{i_q} \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$L_i = \begin{pmatrix} L_{dinc} & M_{dq} \\ M_{qd} & L_{qinc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d\Psi_d}{di_d} & \frac{d\Psi_d}{di_q} \\ \frac{d\Psi_q}{di_d} & \frac{d\Psi_q}{di_q} \end{pmatrix}$$

En négligeant ω_e et R, on a :

$$\begin{aligned} u_d &= j\omega_\mu L_{dinc} i_d + M_{dq} i_q j\omega_\mu \\ u_q &= j\omega_\mu L_{qinc} i_q + M_{qd} i_d j\omega_\mu \end{aligned} \quad (33)$$

Les courants obtenus sont les suivants :

$$\begin{aligned} i_{d\omega_\mu} &\approx \frac{u_{d\omega_\mu} L_{qinc} - M_{dq} u_{q\omega_\mu}}{j\omega_\mu (L_{qinc} L_{dinc} - M_{dq} M_{qd})} \\ i_{q\omega_\mu} &\approx \frac{u_{q\omega_\mu} L_{dinc} - M_{qd} u_{d\omega_\mu}}{j\omega_\mu (L_{qinc} L_{dinc} - M_{dq} M_{qd})} \end{aligned} \quad (34)$$

Pour les harmoniques $H_{m,3n}$ et $H_{m,-3n}$ dans le repère dq, on a :

$$i_{d(m,\pm 3n)} = \frac{U_{d'(m,\pm 3n)} \sin((m\omega_s \pm 3n\omega_e)t + \phi_{d'(m,\pm 3n)})}{\omega_\mu (L_{dinc} L_{qinc} - M_{dq} M_{qd})} \quad (35)$$

Avec :

$$\begin{aligned} U_{d'(m,\pm 3n)}^2 &= (L_{qinc} U_{d(m,\pm 3n)} \cos \phi_{d(m,\pm 3n)} - M_{dq} U_{q(m,\pm 3n)} \\ &\quad \times \sin \phi_{q(m,\pm 3n)})^2 + (U_{d(m,\pm 3n)} L_{qinc} \\ &\quad \times \sin \phi_{d(m,\pm 3n)} + M_{dq} U_{q(m,\pm 3n)} \cos \phi_{q(m,\pm 3n)})^2 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_{d'(m,\pm 3n)} &= \left(U_{d(m,\pm 3n)} L_{qinc} \sin \phi_{d(m,\pm 3n)} \right. \\ &\quad \left. + M_{dq} U_{q(m,\pm 3n)} \cos \phi_{q(m,\pm 3n)} \right) / U_{d'(m,\pm 3n)} \\ \cos \phi_{d'(m,\pm 3n)} &= \left(L_{qinc} U_{d(m,\pm 3n)} \cos \phi_{d(m,\pm 3n)} \right. \\ &\quad \left. - M_{dq} U_{q(m,\pm 3n)} \sin \phi_{q(m,\pm 3n)} \right) / U_{d'(m,\pm 3n)} \end{aligned} \quad (37)$$

De même on a :

$$i_{q(m,\pm 3n)} = \mp \frac{U_{q'(m,\pm 3n)} \cos((m\omega_s \pm 3n\omega_e)t + \phi_{q'(m,\pm 3n)})}{\omega_\mu (L_{dinc} L_{qinc} - M_{dq} M_{qd})} \quad (38)$$

Avec :

$$\begin{aligned} U_{q'(m,\pm 3n)} &= (L_{dinc} U_{q(m,\pm 3n)} \cos \phi_{q(m,\pm 3n)} + M_{qd} U_{d(m,\pm 3n)} \\ &\quad \times \sin \phi_{d(m,\pm 3n)})^2 + (L_{dinc} U_{q(m,\pm 3n)} \sin \phi_{q(m,\pm 3n)} \\ &\quad - M_{qd} U_{d(m,\pm 3n)} \cos \phi_{d(m,\pm 3n)})^2 \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \sin \phi_{q'(m,\pm 3n)} &= \left(L_{dinc} U_{q(m,\pm 3n)} \sin \phi_{q(m,\pm 3n)} \right. \\ &\quad \left. - M_{qd} U_{d(m,\pm 3n)} \cos \phi_{d(m,\pm 3n)} \right) / U_{q'(m,\pm 3n)} \\ \cos \phi_{q'(m,\pm 3n)} &= \left(L_{dinc} U_{q(m,\pm 3n)} \cos \phi_{q(m,\pm 3n)} \right. \\ &\quad \left. + M_{qd} U_{d(m,\pm 3n)} \sin \phi_{d(m,\pm 3n)} \right) / U_{q'(m,\pm 3n)} \end{aligned} \quad (40)$$

Les équations 26 et 27 sont réutilisées pour retrouver les résultats liés au modèle non linéaire. On remplace alors U_d par $U_{d'}$, U_q par $U_{q'}$, ϕ_d par $\phi_{d'}$, ϕ_q par $\phi_{q'}$, et enfin L_d et L_q par $(L_{dinc} L_{qinc} - M_{dq} M_{qd})$.

6.2. Discussion

D'après les figures 8(a), 9(a) et 10(a), on constate que les amplitudes des harmoniques sont plus élevées que celles obtenues avec les deux modèles précédents. En effet, d'après le tableau 1,

TABLEAU 1. Comparaison des erreurs commises sur les harmoniques prédominants avec le modèle linéaire (modèle A), le modèle dq linéarisé utilisant les inductances incrémentales (modèle B) et le modèle non linéaire (modèle C)

		model A err (%)	model B err (%)	model C err (%)
4000rpm/ 40Nm	$f_s \pm 2f_e$	20	14	8
	$f_s \pm 4f_e$	17	15	5
	$2f_s \pm f_e$	32	23	13
	$3f_s \pm 2f_e$	34	29	12
	$3f_s \pm 4f_e$	29	28	17
4000rpm/ 80Nm	$f_s \pm 2f_e$	35	22	5
	$f_s \pm 4f_e$	33	22	2
	$2f_s \pm f_e$	30	22	8
	$3f_s \pm 2f_e$	40	27	13
	$3f_s \pm 4f_e$	38	28	9
4000rpm/ 100Nm	$f_s \pm 2f_e$	41	20	8
	$f_s \pm 4f_e$	42	24	6
	$2f_s \pm f_e$	29	22	13
	$3f_s \pm 2f_e$	43	25	16
	$3f_s \pm 4f_e$	41	22	5

on constate aussi une amélioration avec l'inclusion de la saturation croisée (modèle C) par rapport aux deux autres modèles A et B qui utilisent respectivement les inductances apparentes et incrémentales.

En ce qui concerne les formes d'ondes de courant obtenues (figure 8(b), 9(b) et 10(b)), elles sont très proches des formes d'ondes expérimentales. L'ondulation de courant obtenue avec le modèle non linéaire est aussi supérieure à celle obtenue avec les deux autres modèles (figure 2(b), 3(b), 4(b), 5(b), 6(b) et 7(b)) au vu de l'augmentation de l'amplitude des harmoniques de courant.

Le modèle non linéaire est le modèle qui permet de se rapprocher le plus des résultats expérimentaux étant donné que la saturation est entièrement prise en compte à travers les inductances incrémentales et l'effet de saturation croisée. Les résultats obtenus ne sont pas identiques aux résultats expérimentaux. L'erreur la plus élevée commise sur les harmoniques prédominants est d'environ 20% contre environ 30% avec le modèle linéarisé utilisant les inductances incrémentales. Ces erreurs peuvent être tout d'abord expliquées par les potentielles erreurs commises en calculant les inductances.

En effet, les inductances ont été calculées à partir de courbes dq de flux en fonction du courant issues de calculs éléments finis, ce qui introduit des incertitudes. Mais aussi, des défauts existants dans la machine réelle tels que l'excentricité ne sont pas simulés et peuvent modifier les inductances.

Le modèle permet tout de même de fournir une bonne estimation des courants statoriques ce qui peut être très utile pour des études vibro-acoustique par exemple.

7. CONCLUSIONS

Dans cet article, un modèle analytique permettant de calculer les courants statoriques en prenant en compte la saturation pour une machine synchrone à aimants permanents est proposé.

Ce modèle a été établi à partir de deux autres modèles basés sur un modèle linéaire de la machine et un modèle linéarisé uti-

lisant les inductances incrémentales. Des expérimentations ont permis de valider le modèle.

Ce modèle non linéaire par rapport à ceux déjà existants dans la littérature est générique et non limité en fréquence : n'importe quel harmonique de courant peut-être calculé à partir de n'importe quel harmonique de tension avec une seule et même formule. De plus, le modèle proposé permet aussi de calculer les phases des harmoniques de courant en prenant en compte la saturation ainsi que l'effet de saturation croisée, ce qui permet d'obtenir le spectre mais aussi les formes d'ondes de courant. Ces résultats peuvent ensuite être utilisés dans un but d'optimisation ou encore pour prédire les pertes fer, l'ondulation de couple ou le bruit généré.

8. RÉFÉRENCES

- [1] A. Balamurali, A. Kundu, Z. Li, and N. C. Kar, "Improved Harmonic Iron Loss and Stator Current Vector Determination for Maximum Efficiency Control of PMSM in EV Applications," *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 57, no. 1, pp. 363–373, Jan. 2021, doi : 10.1109/TIA.2020.3034888.
- [2] W. Liang, W. Fei, and P. C.-K. Luk, "Analytical investigation of sideband torque ripple in induction machine drive with SPWM and SVPWM techniques," in 2014 17th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), Hangzhou, China : IEEE, Oct. 2014, pp. 162–168. doi : 10.1109/ICEMS.2014.7013457.
- [3] Z. Qiu, Y. Chen, X. Liu, Y. Kang, and H. Liu, "Analysis of the sideband current harmonics and vibro-acoustics in the PMSM with SVPWM," *IET Power Electronics*, vol. 13, no. 5, pp. 1033–1040, 2020, doi : https://doi.org/10.1049/iet-pel.2019.0661.
- [4] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, and P. Brochet, "Characterization and Reduction of Audible Magnetic Noise Due to PWM Supply in Induction Machines," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 57, no. 4, pp. 1288–1295, Apr. 2010, doi : 10.1109/TIE.2009.2029529.
- [5] A. K. Wallace, R. Spee, and L. G. Martin, "Current harmonics and acoustic noise in AC adjustable-speed drives," *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 26, no. 2, pp. 267–273, Apr. 1990, doi : 10.1109/28.54252.
- [6] W. Liang, J. Wang, P. C.-K. Luk, W. Fang, and W. Fei, "Analytical Modeling of Current Harmonic Components in PMSM Drive With Voltage-Source Inverter by SVPWM Technique," *IEEE Trans. Energy Convers.*, vol. 29, no. 3, pp. 673–680, Sep. 2014, doi : 10.1109/TEC.2014.2317072.
- [7] W. Liang, W. Fei, and P. C.-K. Luk, "An Improved Sideband Current Harmonic Model of Interior PMSM Drive by Considering Magnetic Saturation and Cross-Coupling Effects," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 63, no. 7, pp. 4097–4104, Jul. 2016, doi : 10.1109/TIE.2016.2540585.
- [8] Y. Zhang, S. Wang, H. Xia, and J. Ge, "A Novel SVPWM Modulation Scheme," in 2009 Twenty-Fourth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition, Washington, DC, USA : IEEE, Feb. 2009, pp. 128–131. doi : 10.1109/APEC.2009.4802644.
- [9] J. L. Besnerais, P. Pellerey, V. Lanfranchi, and M. Hecquet, "Bruit acoustique d'origine magnétique dans les machines synchrones," *Techniques de l'ingénieur*, 2013.
- [10] J. L. Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, and P. Brochet, "Bruit audible d'origine magnétique dans les machines asynchrones," *Techniques de l'ingénieur*, 2013.
- [11] D. G. Holmes et T. A. Lipo, *Pulse width modulation for power converters : principles and practice*. Hoboken, NJ : John Wiley, 2003.
- [12] K. Drobnič, L. Gašparin, et R. Fišer, « Fast and Accurate Model of Interior Permanent-Magnet Machine for Dynamic Characterization », *Energies*, vol. 12, n 5, p. 783, févr. 2019.
- [13] B. Stumberger, G. Stumberger, D. Dolinar, A. Hamler, and M. Trlep, "Evaluation of saturation and cross-magnetization effects in interior permanent-magnet synchronous motor," *IEEE Trans. on Ind. Applicat.*, vol. 39, no. 5, pp. 1264–1271, Sep. 2003, doi : 10.1109/TIA.2003.816538.
- [14] A. Dietz, M. Caruso, A. O. Di Tommaso, R. Miceli, and C. Nevoloso, "Enhanced Mathematical Modelling of Interior Permanent Magnet Synchronous Machine Considering Saturation, Cross-Coupling and Spatial Harmonics effects," in 2020 Fifteenth International Conference on Ecological Vehicles and Renewable Energies (EVER), Monte-Carlo, Monaco : IEEE, Sep. 2020, pp. 1–9. doi : 10.1109/EVER48776.2020.9243003.