

# Détermination de schémas électriques équivalents de câbles par la méthode de Cauer Ladder Circuit à partir de la méthode des éléments finis

W.Chen<sup>1</sup>, S. Clénet<sup>1</sup>, T. Henneron<sup>1</sup>, J. Zou<sup>2</sup>, F.Colas<sup>1</sup> et H. Zhang<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Electrotechnique et d'Electronique de Puissance de Lille (L2EP)

<sup>2</sup>Département d'ingénierie électrique, Université de Tsinghua, Chine

**RESUME** – La méthode de Cauer Ladder Network (CLN) permet la construction d'un modèle réduit basé sur un circuit électrique équivalent pour résoudre un problème magnétodynamique. Ce circuit équivalent peut ensuite être utilisé directement pour une analyse du dispositif dans le domaine temporel ou fréquentiel. Dans cette étude, la méthode de CLN est appliquée au développement d'un modèle réduit pour un système de transport HVDC composé de deux câbles avec prise en compte du retour par la terre.

**Mots-clés** – Magnetodynamique, Cauer ladder network, Câble HVDC

## 1. INTRODUCTION

Pour la modélisation des câbles à haute tension en courant continu (HVDC) et simuler son comportement en cas de gros événements (court-circuit, perte d'une station, etc.), il est important de déterminer finement son impédance  $Z$ , qui est un paramètre dépendant de la fréquence. La Méthode des Eléments Finis (MEF) [1] peut être utilisée pour calculer l'impédance pour une fréquence donnée. Bien que la MEF puisse prendre en compte la géométrie complexe du câble, elle fournit l'évolution de l'impédance  $Z$  pour un nombre fini de fréquences. La transposition dans le domaine temporel nécessite alors l'utilisation de techniques telles que le Vector Fitting [2] pour reconstruire un circuit équivalent, ce qui peut entraîner une perte de précision voire des instabilités.

Dans le cas de problèmes magnétodynamiques, la méthode de Cauer Ladder Network (CLN) proposé par Kameari et al [3] permet de construire directement à partir de la MEF un circuit électrique équivalent en cascade composé de résistances et d'inductances. Cette approche permet donc d'extraire un modèle valable dans le domaine fréquentiel et temporel, sans utiliser des méthodes intermédiaires comme le Vector Fitting. En appliquant la méthode de CLN à un problème magnétodynamique résolu par la MEF, des bases réduites d'approximation des champs sont calculées. Ainsi, à partir des connaissances des courants et tensions du circuit équivalent et de ces bases réduites, les répartitions du champ magnétique et de la densité de courant dans tout l'espace peuvent être déterminées.

Pour construire les bases réduites par l'approche CLN, une méthode itérative est utilisée. A chaque itération, basé sur les vecteurs calculés aux itérations précédentes, un vecteur de chaque base est calculé par la résolution d'un système matriciel. Dans la littérature, différentes formulations ont été développées pour calculer les bases. Initialement, la formulation A-phi [3] a été utilisée mais elle présente un problème de compatibilité au niveau des sources des systèmes matriciels à résoudre dans le cas 3D. Pour remédier à ce problème, Biro et al. ont proposé d'utiliser la formulation A-T [4] qui assure automatiquement la compatibilité des sources. De par l'approche itérative, les erreurs liées à la résolution des systèmes

s'accumulent progressivement à chaque itération et génèrent des vecteurs de base qui ne sont plus orthogonaux entre eux, contredisant la théorie de l'approche CLN. Ce phénomène n'est pas problématique si la taille des bases est inférieure à une dizaine d'éléments et si l'effet de peau est faible. Chen et al. [5] ont donc proposé d'utiliser l'algorithme de Gram-Schmidt qui permet d'atténuer cet effet pour la formulation A-T.

Dans cette communication, nous proposons d'appliquer la méthode de CLN à la modélisation d'un système de transport HVDC composé de deux câbles, avec prise en compte du retour par la terre. Nous présentons tout d'abord la méthode CLN A-T dans le cas Single Input Single Output (SISO) ainsi que dans le cas Multi Input Multi Output (MIMO). Ensuite, le circuit équivalent est utilisé pour la simulation dans le domaine fréquentiel, puis temporel, en considérant un défaut tel qu'un court-circuit entre l'âme du câble et le blindage. Dans cette première approche, nous travaillons sur une ligne de faible longueur permettant de négliger les effets capacitifs du fait de la gamme de fréquence considérée afin d'assurer les hypothèses aux problèmes magnétodynamiques.

## 2. CAUER LADDER NETWORK

### 2.1. CLN pour le cas SISO

Dans le cas SISO, nous considérons un seul conducteur  $\Omega_c$  appartenant à un domaine  $\Omega$  alimenté par un courant  $i(\omega)$  avec  $\omega$  la pulsation électrique. Nous proposons de décomposer la densité de courant  $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{x})$  dans le conducteur sous la forme de la somme du champ  $i(\omega)\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$ , où  $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$  qui est d'unité  $m^{-2}$  égale à la densité de courant à fréquence nulle lorsque l'on impose un courant de 1 A dans le conducteur (solution d'un problème d'électrocinétique), et d'un courant de réaction  $\mathbf{J}_{ind}(\omega, \mathbf{x})$ . Dans le cas où l'on suppose que les matériaux ont un comportement linéaire, les équations de Maxwell pour le problème magnétodynamique peuvent être exprimées dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{cases} \text{Rot}_{\mu}^{\frac{1}{\sigma}} \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{J}_{ind}(\omega, \mathbf{x}) + i(\omega)\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) \\ \text{Rot}_{\sigma}^{\frac{1}{\mu}} \mathbf{J}_{ind}(\omega, \mathbf{x}) = -j\omega \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \\ \text{div } \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = 0 \\ \text{div } \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$ ,  $\mu$ , et  $\sigma$  sont respectivement l'induction magnétique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique. La densité de courant  $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$  vérifie les conditions suivantes sur la frontière :

$$\iint_{\Gamma_{ek}} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \pm 1 \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x})|_{\Gamma_J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3)$$

avec les surfaces  $\Gamma_{ek}$   $k = 1, 2$  qui représentent les bornes du conducteur au travers desquelles on impose un courant de 1 A et la surface  $\Gamma_J$  qui représente la surface extérieure isolante du conducteur. La densité de courant de réaction  $\mathbf{J}_{ind}(\omega, \mathbf{x})$  satisfait les conditions suivantes :

$$\iint_{\Gamma_{ek}} \mathbf{J}_{ind}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \mathbf{J}_{ind}(\mathbf{x})|_{\Gamma_J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4)$$

Afin de satisfaire les conditions aux limites (2)-(3), nous introduisons le champ source  $\mathbf{J}_{source}(\mathbf{x})$  tel que  $\iint_{\Gamma_{ek}} \mathbf{J}_{source}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = \pm 1$ . La densité de courant  $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$  peut alors être exprimée de la manière suivante :

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = \mathbf{Rot} \mathbf{T}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{source}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

où  $\mathbf{T}_s(\mathbf{x})$  est un potentiel vecteur qui satisfait les conditions :

$$\iint_{\Gamma_{ek}} \mathbf{Rot} \mathbf{T}_s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{T}_s(\mathbf{x})|_{\Gamma_J} = 0 \quad (6)$$

La détermination du potentiel  $\mathbf{T}_s(\mathbf{x})$  revient à résoudre un problème électrocinétique :

$$\begin{cases} \mathbf{Rot}(\mathbf{Rot} \mathbf{T}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{source}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \\ \text{div}(\mathbf{Rot} \mathbf{T}_s(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{source}(\mathbf{x})) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Ce problème peut être résolu facilement par la MEF. Le champ source  $\mathbf{J}_{source}(\mathbf{x})$  peut être calculé facilement à l'aide de la technique d'arbre de facette dans le cas 3D [6].

Une fois la densité de courant  $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$  déterminée il reste à calculer les champs  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{J}_{ind}(\omega, \mathbf{x})$ . Pour cela, les champs peuvent être exprimés à l'aide de deux potentiels vecteurs comme suit :  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{Rot} \mathbf{A}(\omega, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{J}_{ind}(\omega, \mathbf{x}) = \mathbf{Rot} \mathbf{T}_{ind}(\omega, \mathbf{x})$ . Lors de l'application de la MEF, les potentiels vecteurs peuvent être exprimés de la manière suivante :  $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A A_i(\omega) \mathbf{w}_i^e(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{T}_{ind}(\omega, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A T_{ind,i}(\omega) \mathbf{w}_i^e(\mathbf{x})$ , où  $A_i(\omega)$  et  $T_{ind,i}(\omega)$  représentent les circulations de  $\mathbf{A}(\omega, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{T}_{ind}(\omega, \mathbf{x})$  le long de l'arête  $i$ ,  $\mathbf{w}_i^e$  est la fonction d'interpolation associée à l'arête  $i$  et  $A$  représente le nombre d'arêtes du maillage.

Les circulations  $A_i(\omega)$  et  $T_{ind,i}(\omega)$  sont les solutions du problème (1) discrétisé par la MEF :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_\mu & -\mathbf{M}^t \\ 0 & \mathbf{K}_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_{ind} \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_{ind} \end{bmatrix} = i(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

où les termes sont :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_\mu = [k_{\sigma,ij}], k_{\mu,ij} = \int_{\Omega} \mathbf{Rot} \mathbf{w}_i^e \cdot \frac{1}{\mu} \mathbf{Rot} \mathbf{w}_j^e d\Omega \\ \mathbf{K}_\sigma = [k_{\sigma,ij}], k_{\sigma,ij} = \int_{\Omega_c} \mathbf{Rot} \mathbf{w}_i^e \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{Rot} \mathbf{w}_j^e d\Omega \\ \mathbf{M} = [m_{i,j}], m_{i,j} = \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^e \cdot \mathbf{Rot} \mathbf{w}_j^e d\Omega \\ \mathbf{F} = [f_i], f_i = \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^e \cdot \sum_{j=1}^A (\mathbf{Rot} \mathbf{T}_s + \mathbf{J}_{source}) \mathbf{Rot} \mathbf{w}_j^e d\Omega \\ \mathbf{A} = [A_i(\omega)] \\ \mathbf{T}_{ind} = [T_i(\omega)] \end{cases} \quad (9)$$

On cherche maintenant à construire une base sur le domaine  $\Omega$  dans lequel on cherchera une approximation de  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$  et une base sur le domaine  $\Omega_c$  dans lequel on cherchera une approximation de  $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{x})$ . Pour cela on utilise l'algorithme de Lanczos appliqué aux matrices autoadjointes  $\mathbf{K}_\mu$  et  $\mathbf{M}^t \mathbf{K}_\sigma^{-1} \mathbf{M}$  qui permet de construire  $2N$  vecteurs qui

correspondent aux colonnes formées par les circulations le long des arêtes :  $\mathbf{A}_{2n+1} = [A_{2n+1,i}]$  et  $\mathbf{T}_{2n+2} = [T_{2n+2,i}]$ , où l'indice  $n \in [0, N]$  et  $N$  représente la taille de la base choisie pour l'approximation. On forme ainsi deux bases locales :  $\{\mathbf{B}_{2n+1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A \mathbf{Rot} \mathbf{w}_i^e(\mathbf{x}) A_{2n+1,i} \mid n \in [0, N]\}$  et  $\{\mathbf{J}_{2n}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_s(\mathbf{x})/R_0 \text{ si } n = 0, \mathbf{J}_{2n}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^A \mathbf{Rot} \mathbf{w}_i^e(\mathbf{x}) T_{2n,i} \text{ si } n \in [1, N]\}$ , où  $R_0$  est la résistance calculée par la densité de courant  $\mathbf{J}_s(\mathbf{x})$ . Chaque étape de l'algorithme a une interprétation physique spécifique que nous détaillerons ci-dessous.

Etape -1 : Calcul de  $R_0$

$$R_0 = \iint_{\Omega_c} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}) d\Omega \quad (10)$$

Etape 0 :

$$\begin{cases} \text{Résoudre} : \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_1 = \mathbf{F} \\ \text{Calculer} : \mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1^t \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_1 \end{cases} \quad (11)$$

Initialisation :  $n = 1$ . Itération des étapes 1 et 2 jusqu'à  $n = N$ .

Etape 1 :

$$\begin{cases} \text{Résoudre} : \mathbf{K}_\sigma \mathbf{T}_{2n} = -\mathbf{M} \mathbf{A}_{2n-1} / L_{2n-1} \\ \text{Calculer} : 1/R_{2n} = \mathbf{T}_{2n}^t \mathbf{K}_\sigma \mathbf{T}_{2n} \end{cases} \quad (12)$$

Etape 2 :

$$\begin{cases} \text{Résoudre} : \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_{2n+1} = \mathbf{M}^t \mathbf{T}_{2n} R_{2n} \\ \text{Calculer} : \mathbf{L}_{2n+1} = \mathbf{A}_{2n+1}^t \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_{2n+1} \end{cases} \quad (13)$$

On constate que les étapes 0 et 2 de l'algorithme correspondent à la résolution d'un problème magnétostatique, tandis que l'étape 1 correspond à la résolution d'un problème électrocinétique. L'utilisation de deux potentiels vecteurs présente l'avantage d'assurer la compatibilité du système à résoudre lors des étapes 0-2, ce qui n'est pas toujours le cas si une approche basée sur une formulation A-Phi a été utilisée. Cela garantit une bonne construction de vecteurs de base qui sont bien orthogonaux entre eux. En effet, il est possible de démontrer que les bases locales calculées par la méthode de CLN sont orthogonales :

$$\begin{cases} \iiint_{\Omega_c} \mathbf{J}_{2i}(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_{2j}(\mathbf{x}) d\Omega = \delta_{i,j} / R_{2i} \quad \forall i, j \in [0, N] \\ \iiint_{\Omega} \mathbf{B}_{2i+1}(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{2j+1}(\mathbf{x}) d\Omega = \delta_{i,j} L_{2i+1} \quad \forall i, j \in [0, N] \end{cases} \quad (14)$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker.

En réalité ces conditions ne sont pas toujours vérifiées à cause d'erreurs résiduelles liées à la résolution numérique des systèmes qui restent imparfaite. Pour pallier à ce problème, on peut appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt [5] pour re-orthogonaliser les bases locales.

Ainsi, il est possible d'utiliser ces bases pour approximer les champs locaux à l'aide des décompositions suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}) \approx \sum_{n=0}^N v_{2n}(\omega) \mathbf{J}_{2n}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \approx \sum_{n=0}^N i_{2n+1}(\omega) \mathbf{B}_{2n+1}(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (15)$$

où les coefficients  $v_0(\omega), \dots, v_{2N}(\omega)$  et  $i_1(\omega), \dots, i_{2N+1}(\omega)$  sont des scalaires à déterminer. En utilisant les propriétés des bases locales, on peut démontrer qu'ils satisfont les équations

du circuit électrique équivalent présenté dans la Fig. 1 et représentent soit des chutes de tension ou des courants. Les résistances  $R_0, \dots, R_{2N}$  et les inductances  $L_1, \dots, L_{2N+1}$  de ce circuit équivalent correspondent aux coefficients calculés aux différentes étapes de la méthode CLN (cf algorithme précédente). La tension  $V$  dans ce circuit équivalent est égale à la tension appliquée aux bornes du conducteur, c'est à dire entre les surfaces  $\Gamma_{e1}$  et  $\Gamma_{e2}$ .

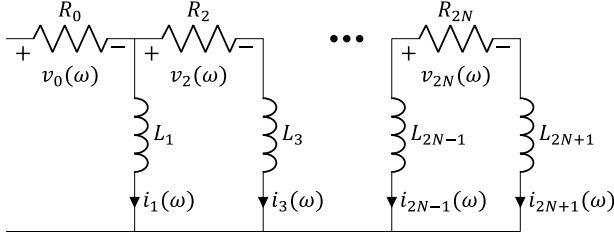


FIG. 1. Caer ladder network pour le cas SISO

L'avantage majeur de la méthode CLN est qu'elle permet de simplifier la résolution d'un problème de magnétodynamique coûteux en le ramenant à la résolution d'un problème de circuit équivalent. En effet, pour n'importe quelle tension imposée et que cela soit dans le domaine temporel ou fréquentiel, il suffit de résoudre les équations liées au circuit électrique présenté dans la Fig. 1 pour obtenir les coefficients  $v_0(\omega), \dots, v_{2N}(\omega)$  et  $i_1(\omega), \dots, i_{2N+1}(\omega)$ , ce qui est très rapide pour ensuite être capable de reconstruire les champs  $\mathbf{B}(\omega, \mathbf{x})$  et  $\mathbf{J}(\omega, \mathbf{x})$ . Un autre avantage est que la CLN n'a pas besoin du Vector Fitting, qui nécessite un paramétrage, pour que le modèle soit valable dans le domaine transitoire.

## 2.2. CLN pour le cas MIMO

Dans le cas MIMO, pour plusieurs conducteurs  $\Omega_{c,k}$  dans le domaine  $\Omega$  alimentés par  $\mathcal{M}$  courants indépendants  $i_1(\omega), \dots, i_{\mathcal{M}}(\omega)$ , il est nécessaire de résoudre  $\mathcal{M}$  problèmes électrocinétiques similaires à l'équation (7) afin de déterminer les  $\mathcal{M}$  densités de courant  $\mathbf{J}_s^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{J}_s^{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ . Chacune de ces densités de courant  $\mathbf{J}_s^k(\mathbf{x})$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$\mathbf{J}_s^k(\mathbf{x}) = \mathbf{Rot} \mathbf{T}_s^k(\mathbf{x}) + \mathbf{J}_{source}^k(\mathbf{x}) \quad (16)$$

où  $\mathbf{J}_{source}^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{J}_{source}^{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$  sont les champs sources construits par la technique d'arbre et  $\mathbf{T}_s^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{T}_s^{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$  sont les potentiels vecteurs. Les champs sources doivent satisfaire la condition suivante :

$$\iint_{\Gamma_{es,k}} \mathbf{J}_{source}^t \cdot \mathbf{n} d\mathbf{S} = \pm \delta_{t,k} \quad \forall t, k \in [1, \mathcal{M}] \quad (17)$$

où  $\Gamma_{e1,k}$  et  $\Gamma_{e2,k}$  sont les surfaces correspondantes aux bornes du conducteur  $k$ . Sur le reste de la frontière  $\Gamma_{J,k}$  du conducteur  $k$ , on impose que la composante normale de  $\mathbf{J}^k(\mathbf{x})$  est nulle. On résout alors pour chaque conducteur un problème d'électrocinétique en utilisant la formulation en potentiel vecteur comme dans le cas SISO qui permet de déterminer les densités de courant  $\mathbf{J}^k(\mathbf{x})$ .

Une fois les densités de courant  $\mathbf{J}^k(\mathbf{x})$  déterminées, le problème magnétodynamique consiste à résoudre le problème suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_\mu & -\mathbf{M}^t \\ 0 & \mathbf{K}_\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_e \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{T}_e \end{bmatrix} = \sum_k \mathbf{i}_k(\omega) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

où les sources sont définies par :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_k = [f_{k,i}] \\ f_{k,i} = \int_{\Omega_c} \mathbf{w}_i^e \cdot \sum_{j=1}^{\mathcal{A}} (\mathbf{Rot} \mathbf{T}_s^k + \mathbf{J}_{source}^k) \mathbf{Rot} \mathbf{w}_j^e d\Omega \end{cases} \quad (19)$$

Pour le cas MIMO, l'algorithme de Lanczos est appliqué aux matrices autoadjointes  $\mathbf{K}_\mu$  et  $\mathbf{M}^t \mathbf{K}_\sigma^{-1} \mathbf{M}$  avec  $\mathcal{M}$  vecteurs initiaux :  $\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{\mathcal{M}}$ . À partir de cela, on peut construire  $2N$  matrices qui sont formées par  $\mathcal{M}$  colonnes :  $\mathbf{A}_{2n+1}^{\mathcal{M}} = [A_{2n+1,i}^1, \dots, A_{2n+1,i}^{\mathcal{M}}]$  et  $\mathbf{T}_{2n+2}^{\mathcal{M}} = [T_{2n+2,i}^1, \dots, T_{2n+2,i}^{\mathcal{M}}]$ , avec  $n \in [0, N]$ . On forme ainsi deux bases locales pour chacun des conducteurs :  $\{\mathbf{B}_{2n+1}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{A}} \mathbf{Rot} \mathbf{w}_i^e(\mathbf{x}) A_{2n+1,i}^k \mid n \in [0, N]\}$  et  $\{\mathbf{J}_{2n}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{M}} \mathbf{J}_s^i(\mathbf{x}) G_{0i,k} \text{ si } n = 0, \mathbf{J}_{2n}^k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{A}} \mathbf{Rot} \mathbf{w}_i^e(\mathbf{x}) T_{2n,i}^k \text{ si } n \in [1, N]\}$ , où  $[G_{0i,k}]$  est la matrice de conductance calculée par les densités de courant  $\mathbf{J}_s^1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{J}_s^{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ . L'algorithme détaillé est présenté ci-dessous.

Étape -1 :

$$\begin{cases} \forall i, k \in [1, \mathcal{M}] & R_{0i,k} = \iiint_{\Omega_c} \mathbf{J}_s^i \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_s^k d\Omega \\ [G_{0i,k}] = \mathbf{G}_0 = [R_{0i,k}]^{-1} \end{cases} \quad (20)$$

Étape 0 :

$$\begin{cases} \text{Résoudre} : \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_1^{\mathcal{M}} = [\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{\mathcal{M}}] \\ \text{Calculer} : \mathbf{L}_1 = \mathbf{A}_1^{\mathcal{M}t} \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_1^{\mathcal{M}} \end{cases} \quad (21)$$

Initialisation :  $n = 1$ . Itération des étapes 1 et 2 jusqu'à  $n = N$ .

Étape 1 :

$$\begin{cases} \text{Résoudre} : \mathbf{K}_\sigma \mathbf{T}_{2n}^{\mathcal{M}} = -\mathbf{M} \mathbf{A}_{2n-1}^{\mathcal{M}} \mathbf{L}_{2n-1}^{-1} \\ \text{Calculer} : \mathbf{R}_{2n}^{-1} = \mathbf{T}_{2n}^{\mathcal{M}t} \mathbf{K}_\sigma \mathbf{T}_{2n}^{\mathcal{M}} \end{cases} \quad (22)$$

Étape 2 :

$$\begin{cases} \text{Résoudre} : \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_{2n+1}^{\mathcal{M}} = \mathbf{M}^t \mathbf{T}_{2n}^{\mathcal{M}} \mathbf{R}_{2n} \\ \text{Calculer} : \mathbf{L}_{2n+1} = \mathbf{A}_{2n+1}^{\mathcal{M}t} \mathbf{K}_\mu \mathbf{A}_{2n+1}^{\mathcal{M}} \end{cases} \quad (23)$$

Les matrices  $\mathbf{R}_0, \dots, \mathbf{R}_{2N}$  et  $\mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_{2N+1}$  sont des matrices de taille  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . La matrice  $\mathbf{L}_{2n+1}$  représente les inductances propres et mutuelles, tandis que la matrice  $\mathbf{R}_{2n}$  représente les résistances prenant en compte les effets de peau et de proximité.

Les vecteurs de bases sont orthogonaux par bloc  $\forall i, j \in [0, N]$  et  $\forall m, n \in [1, \mathcal{M}]$  :

$$\iiint_{\Omega_c} \mathbf{J}_{2i}(\mathbf{x})^m \cdot \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}_{2j}^n(\mathbf{x}) d\Omega = \delta_{i,j} G_{2im,n} \quad (24)$$

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{B}_{2i+1}(\mathbf{x})^m \cdot \frac{1}{\mu} \mathbf{B}_{2j+1}^n(\mathbf{x}) d\Omega = \delta_{i,j} L_{2i+1m,n} \quad (25)$$

où  $[G_{2im,n}] = \mathbf{G}_{2i} = \mathbf{R}_{2i}^{-1}$

On utilise les décompositions suivantes pour obtenir une approximation des champs :

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\omega, \mathbf{x}) \approx \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} v_{2n,k}(\omega) \mathbf{J}_{2n}^k(\mathbf{x}) \\ \mathbf{B}(\omega, \mathbf{x}) \approx \sum_{n=0}^N \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} i_{2n+1,k}(\omega) \mathbf{B}_{2n+1}^k(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (26)$$

où les coefficients  $v_{0,1}(\omega), \dots, v_{2N,\mathcal{M}}(\omega)$  et  $i_{1,1}(\omega), \dots, i_{2N+1,\mathcal{M}}(\omega)$  représentent les chutes de tension et les courants d'un circuit électrique multiport. A titre d'exemple, la Fig. 2 présente le cas d'un circuit lorsque  $\mathcal{M} = 2$ .

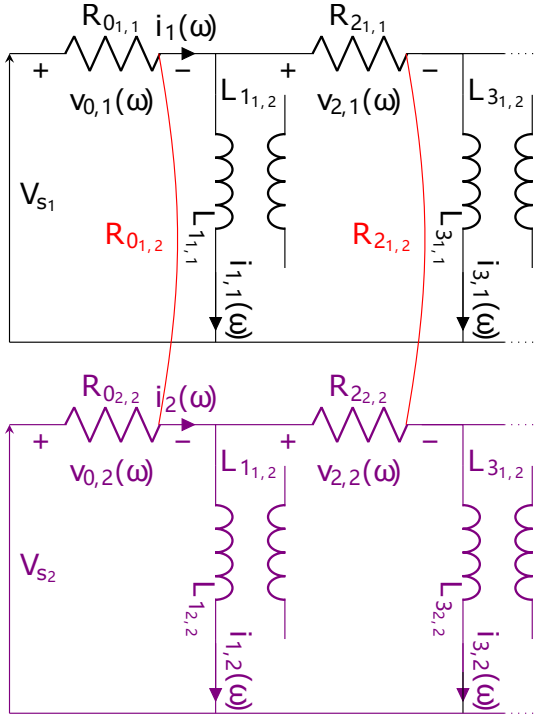


FIG. 2. Cauer ladder network en cas MIMO pour  $\mathcal{M} = 2$

### 3. APPLICATION SUR UN CÂBLE DC SOUTERRAIN

La Figure 3 présente le système de transport HVDC considéré par la suite qui est composé de deux câbles HVDC. On considère ici aussi le retour par la terre en supposant que celle-ci possède une conductivité non nulle. Dans cette configuration, on peut se poser la question de l'influence du domaine représentant le retour par la terre sachant que celui-ci ne peut être infini car cela peut conduire à un problème non physique. On définit ainsi le rayon  $R_t$  qui représente la taille du retour de terre.

La présence du retour par la terre implique que la conductivité de la terre n'est pas nulle, ce qui donne lieu à un courant induit dans la terre. Lorsqu'un court-circuit phase-phase se produit dans l'un des câbles, il y a un courant dans le blindage de sens opposé à celui dans l'âme du câble. Étant donné que l'épaisseur de peau pour la terre est grande, le rayon  $R_t$  est également important.

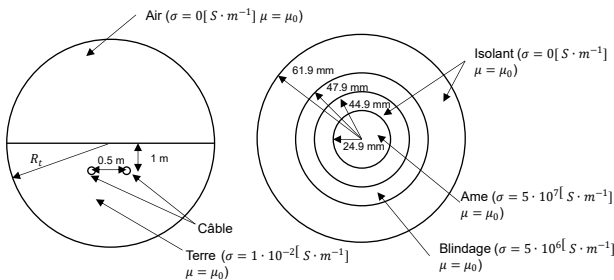


FIG. 3. Géométrie du système de transport HVDC (à gauche) et la géométrie des câbles et les caractéristiques des matériaux (à droite)

Pour étudier l'influence du rayon  $R_t$ , nous avons considéré

deux cas :  $R_t = 68 [km]$  et  $R_t = 136 [km]$ . On considère un système de longueur  $10 [km]$ . Les câbles, plus précisément les âmes, sont alimentées aux deux extrémités par une tension continue de manière à avoir un courant en régime permanent de  $\pm 1500 [A]$ .

Pour le problème considéré, il y a cinq domaines conducteurs : deux âmes, deux blindages et la terre. Nous avons un système MIMO avec  $\mathcal{M} = 4$  à modéliser puisque la terre est utilisée pour fixer la référence de tension. Nous allons construire uniquement quatre densités de courant qui satisfont les conditions suivantes,  $\forall \kappa \in [1, 2]$  :

$$\begin{cases} \iint_{\Gamma_{e\kappa,a1}} \mathbf{J}_s^1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{\Gamma_{e\kappa,terre}} \mathbf{J}_s^1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = (-1)^{\kappa-1} \\ \iint_{\Gamma_{e\kappa,a2}} \mathbf{J}_s^2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{\Gamma_{e\kappa,terre}} \mathbf{J}_s^2(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = (-1)^{\kappa-1} \\ \iint_{\Gamma_{e\kappa,b1}} \mathbf{J}_s^3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{\Gamma_{e\kappa,terre}} \mathbf{J}_s^3(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = (-1)^{\kappa-1} \\ \iint_{\Gamma_{e\kappa,b2}} \mathbf{J}_s^4(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{\Gamma_{e\kappa,terre}} \mathbf{J}_s^4(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} dS = (-1)^{\kappa-1} \end{cases} \quad (27)$$

où  $\Gamma_{e\kappa,ame 1} \mid \kappa = 1, 2$  sont les deux extrémités de la 1<sup>ère</sup> âme,  $\Gamma_{e\kappa,ame 2} \mid \kappa = 1, 2$  ceux de la 2<sup>ème</sup> âme,  $\Gamma_{e\kappa,blindage 1} \mid \kappa = 1, 2$  ceux du 1<sup>er</sup> blindage,  $\Gamma_{e\kappa,blindage 2} \mid \kappa = 1, 2$  ceux du 2<sup>ème</sup> blindage et  $\Gamma_{e\kappa,terre} \mid \kappa = 1, 2$  pour la terre. De plus,  $\mathbf{J}^1(\mathbf{x})$  est seulement non nul dans la 1<sup>ère</sup> âme et la terre comme présenté sur la Fig. 4. Il est similaire pour  $\mathbf{J}^2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{J}^4(\mathbf{x})$ . Ces conditions aux limites indiquent qu'il y a toujours un courant de retour dans la terre, et que dans la direction transversale, il y a toujours neutralité de courant lors de l'application des approximations (26).

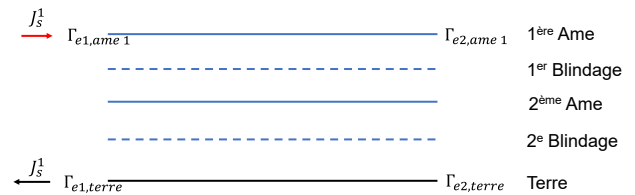


FIG. 4. Illustration de la densité de  $\mathbf{J}_s^1(\mathbf{x})$  dans la direction parallèle au câble

Le maillage du système considéré est présenté sur la Fig. 5 pour le rayon  $R_t = 68 [km]$ . Le maillage contient 22262 éléments.

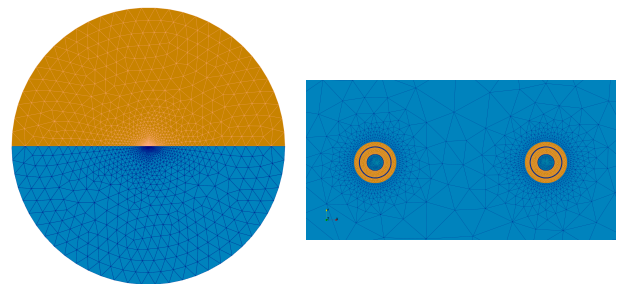


FIG. 5. Maillage du système (à gauche) pour le rayon  $R_t = 68 [km]$  et maillage zoomé de la partie des câbles (à droit)

#### 3.1. Réponse en régime fréquentiel

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'évolution de l'impédance par unité de longueur du câble calculée en résolvant les équations de la magnétodynamique en utilisant la MEF qui constituera notre modèle de référence et en appliquant la méthode de CLN décrite précédemment. On impose des tensions de signe opposé aux deux extrémités des âmes des deux câbles que l'on note  $V(\omega)$ . On note  $i(\omega)$  le courant qui traverse

les âmes des deux câbles. Les différences de potentiels de la terre et des blindages sont nuls. La configuration de connexion est présentée par la Fig. 6. Nous comparons ici l'évolution de l'impédance de l'âme qui est donnée par :

$$Z(\omega) = V(\omega)/i(\omega) \quad (28)$$

La Fig. 7 illustre l'évolution de les impédances données par la MEF et celles obtenues par la méthode de CLN et cela pour une taille  $N$  de base réduite différente (cf (26)) lors  $R_t = 68 [km]$ . Nous observons que l'augmentation de la taille de la base réduite améliore la précision du modèle, en particulier aux hautes fréquences. Cette amélioration avec l'accroissement de la taille  $N$  de la base était attendue car le développement de l'équation (26) est similaire à un développement limité autour de la fréquence 0 Hz de la solution de l'équation (18).

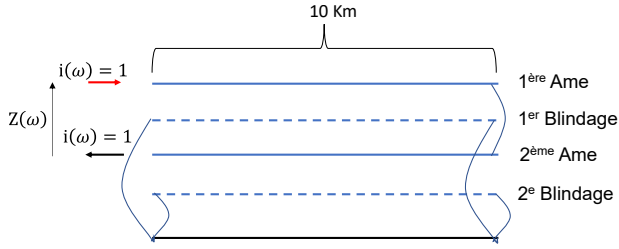


FIG. 6. Configuration des câbles pour la réponse fréquentielle

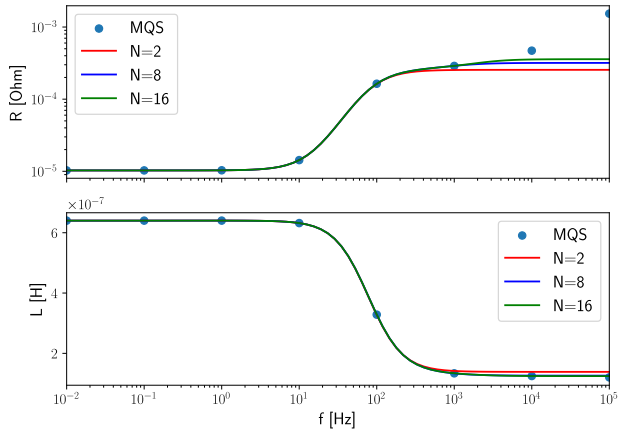


FIG. 7. Evolution de la résistance  $R$  et de l'inductance  $L$  de l'impédance  $Z_{me} = R + j\omega L$  en fonction de la fréquence donnée par le modèle MEF complet (MQS) et par le CLN de différents  $N$ ,  $R_t$  est fixé à 68 km.

### 3.2. Réponse en régime temporel

Nous allons maintenant simuler un défaut en régime temporel à l'aide du circuit développé, et évaluer l'influence de la taille du domaine tenant compte du retour par la terre. Supposons qu'à  $t = 5 [ms]$ , un court-circuit se produit entre l'âme du câble 1 et son blindage, à une distance de 5 km. Des sources de tension stationnaires sont appliquées aux surfaces d'entrée de la première et de sortie de la deuxième âme. La tension entre la première âme du câble et le premier blindage, à une distance de 5 km, devient égale à partir de  $t = 5 [ms]$ . Les deux extrémités des blindages sont toujours connectées à la terre, comme illustré dans la Fig. 8.

Nous utilisons le circuit équivalent construit à partir de la méthode CLN pour représenter le comportement du câble de chaque côté du défaut présenté dans la Fig. 9. Le circuit équivalent a été calculé pour les deux valeurs de  $R_t$ , ce qui conduit à des valeurs différentes de résistance et d'inductance dans le

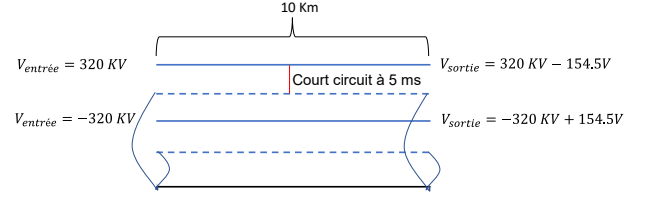


FIG. 8. Configuration des câbles pour la réponse en régime temporel

circuit équivalent construit par la méthode CLN. Le défaut est simulé par un court-circuit entre les connexions de ces deux circuits. L'évolution du courant circulant dans l'âme du câble avant et après le défaut est présentée dans la Fig. 10. On peut constater que l'influence de la taille  $N$  des bases n'est pas significative et que les tailles choisies du domaine représentant la terre n'a pas d'influence sur la réponse temporelle. Les autres courants à l'entrée du système sont présentés dans la Fig. 11. On peut constater que le courant parcouru dans la terre qui est égal à  $i_{a1} + i_{b1} + i_{a2} + i_{b2}$  est nul avant et après le défaut, ce qui est normal car l'âme et le blindage du câble 1 forment une boucle lors du court-circuit phase-phase et que nous n'avons pas considéré les effets capacitifs.

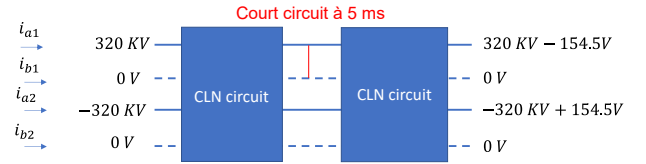


FIG. 9. Configuration des circuits équivalents pour la réponse en régime temporel et la convention des courants

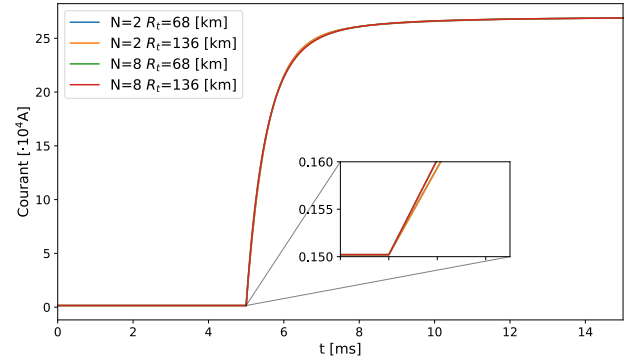


FIG. 10. Evolution de courant dans l'âme du câble 1 ( $i_{a1}$ ) calculé pour différents  $N$  et  $R_t$

## 4. CONCLUSIONS

La méthode de CLN a été appliquée pour construire un circuit électrique équivalent modélisant un système de transport HVDC avec prise en compte les effets résistifs et inductifs. On constate que cette méthode permet de bien représenter le comportement fréquentiel du câble comparé à la MEF. Le modèle a ensuite été appliqué à la modélisation d'un défaut en régime temporel. Comme perspective à ce travail, on peut envisager de coupler ce modèle avec le modèle du télégraphiste, comme cela est fait classiquement pour prendre en compte les effets de propagation ou les effets capacitifs dans les câbles, et aussi comparer à d'autres modèles de câbles.

## 5. REMERCIEMENTS

Soutien financier du programme du China Scholarship Council (N° 202106380042)

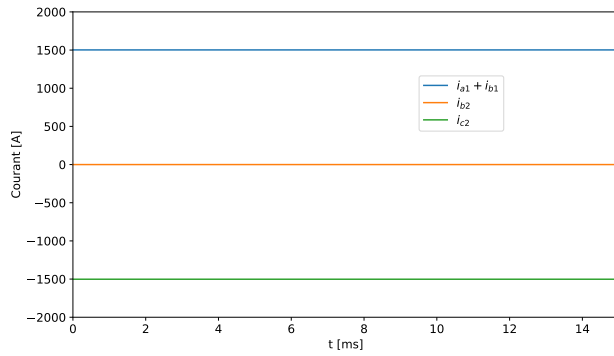


FIG. 11. Evolution des courants à l'entrée de câbles : somme des courants dans l'âme et le blindage du câble 1 ( $i_{a1} + i_{b1}$ ), courant dans le blindage du câble 2 ( $i_{b2}$ ) et courant dans l'âme du câble 2 ( $i_{c2}$ ),  $R_t$  est fixé à 68 [km]

## 6. RÉFÉRENCES

- [1] Y.-J. Wang et S.-J. Liu, « A Review of Methods for Calculation of Frequency-dependent Impedance of Overhead Power Transmission Lines (Invited Review Paper) », Proc.-Natl. Sci. Coun. Repub. China Part Phys. Sci. Eng., vol. 25, no 6, p. 329-338, 2001.
- [2] W. Zhou, Y. Wang, et Z. Chen, Vector Fitting-Based Reduced Order Modeling Method for Power Cables. 2018
- [3] A. Kameari, H. Ebrahimi. « Cauer ladder network representation of eddy-current fields for model order reduction using finite-element method », IEEE Trans. Magn., vol. 54, no. 3, p. 1-4, 2018.
- [4] N. Köster, O. König, et O. Bíró, « Proper Generalized Decomposition With Cauer Ladder Network Applied to Eddy Current Problems », IEEE Trans. Magn., vol. 57, no 6, p. 1-4, 2021.
- [5] W. Chen, S. Clenet, et T. Henneron, « Study of the convergence of the Cauer Ladder Network method », 11th International Conference on Computation in Electromagnetics, 2023
- [6] Y. Le Menach, S. Clenet, et F. Piriou, « Numerical model to discretize source fields in the 3D finite element method », IEEE Trans. Magn., vol. 36, no 4, p. 676-679, juill. 2000