

Modélisation des effets capacitifs-inductifs couplés avec le modèle de Darwin

Houssein Taha¹, Zuqi Tang¹, Thomas Henneron¹, Yvonnick Le Menach¹, Florentin Salomez¹ and Jean-Pierre Ducreux²

¹ Univ. Lille, Arts et Metiers Institute of Technology, Centrale Lille, Junia, ULR2697-L2EP, F-59000 Lille, France

² EDF R&D, ERMES, 7 Boulevard Gaspard Monge, 91120 Palaiseau, France

RESUME – La modélisation des phénomènes capacitifs incluant les effets inductifs devient nécessaire en raison de la montée en fréquence des signaux alimentant les dispositifs électrotechniques. À basse fréquence, le modèle électro-quasistatique (EQS) est largement utilisé pour étudier les effets résistifs-capacitifs couplés, tandis que le modèle magnéto-quasistatique (MQS) est utilisé pour décrire les effets résistifs-inductifs couplés. En revanche, lorsque la fréquence augmente, le modèle de Darwin, est capable de capturer les effets résistifs-capacitifs-inductifs couplés en négligeant les effets de propagation des ondes. Dans ce travail, une formulation jaugée du modèle de Darwin appliquée à la méthode des éléments finis (EF) est proposée pour résoudre un système matriciel de grande taille. Ensuite, nous nous intéressons aux limites de ces modèles, en étudiant l'influence de la fréquence sur les distributions du champ électromagnétique et sur l'impédance des dispositifs électromagnétiques. Deux exemples différents sont étudiés. Pour le premier, afin de valider le modèle de Darwin, les résultats de mesure sont fournis pour comparer avec les résultats de simulation, qui montrent un bon accord. Pour le second, les résultats de simulation de trois modèles différents sont comparés, à la fois pour les distributions de champ locales et les impédances globales. Il est démontré que le modèle EQS peut être utilisé comme indicateur pour savoir à quelle fréquence le modèle Darwin doit être appliqué.

Mots-clés – Effets résistifs-capacitifs-inductifs ; méthode des éléments finis ; modèles quasi-statiques.

1. INTRODUCTION

Dans la littérature, les problèmes électrostatique, électrocinétique et magnétostatique sont largement utilisés à basse fréquence pour capturer les effets capacitifs, résistifs et inductifs découpés respectivement [1, 2]. Lorsque la fréquence de la tension d'alimentation appliquée aux enroulements des appareils électriques augmente, le champ électrique dans les régions proches des enroulements ne peut pas être négligé. Dans ce cas, il convient d'accorder une attention particulière aux effets résistifs-capacitifs couplés. Dans la pratique, le modèle électro-quasistatique (EQS) [3] est couramment utilisé pour les champs résultant de la haute tension ou de la microélectronique, par exemple, car ce modèle est valable lorsque la longueur caractéristique des phénomènes magnétiques est faible par rapport à la longueur d'onde [4,5]. En revanche, si l'effet de peau apparaît sur la distribution de la densité de courant dans l'enroulement, les effets résistifs-inductifs couplés doivent être pris en compte, le modèle magnéto-quasistatique (MQS) [1] est généralement utilisé.

En outre, si tous ces effets couplés doivent être caractérisés en même temps, le modèle de Maxwell complet [2, 4] peut être utilisé, même s'il est plus coûteux en temps de calcul et présente un problème d'instabilité à basse fréquence, comme indiqué dans [4, 5]. D'autre part, si la modélisation n'est envisagée que dans la gamme des fréquences intermédiaires, le modèle de Darwin peut être un bon choix [6–10].

Le modèle de Darwin est basé sur le système d'équations Maxwell, incluant tous les effets, à savoir capacitif, résistif et inductif en négligeant celui du rayonnement. Ce dernier attire de plus en plus l'attention depuis une décennie [7]. La matrice du

système éléments finis (EF) résultante du modèle de Darwin est singulière, non-symétrique et mal-conditionnée. Cependant, la formulation proposée dans [9] est symétrique et régulière. Mais, elle nécessite l'utilisation de solveurs directs car le système matriciel EF résultant correspond à un problème de point selle pour lequel le solveur itératif n'est pas adapté. Par contre, le solveur itératif est toujours un bon choix dans le cas industriel car il peut résoudre un large système au-delà de la limitation des solveurs directs. Pour résoudre ce problème numérique survenant dans les applications industrielles modélisées par le modèle de Darwin, une formulation spécialement conçue [11] adaptées aux solveurs itératifs est proposée dans ce travail.

La motivation de notre travail est de proposer une approche basée sur le modèle de Darwin avec une formulation A/φ. L'originalité de ce travail repose sur un traitement de la formulation par l'introduction de multiplicateurs de Lagrange ceci pour permettre l'utilisation de solveur itératif et ainsi pouvoir traiter des cas industriels (hors de portée des solveurs directs classiques). Ainsi, nous nous intéressons à étudier les limites des modèles quasistatiques, en particulier pour le domaine de calcul comprenant à la fois des domaines conducteurs et non conducteurs, ce qui n'a pas été bien abordé dans la littérature. En outre, notre étude est dans le domaine fréquentiel en raison du calcul des impédances. Pour atteindre cet objectif, nous commençons par présenter notre approche et à l'aide d'un exemple industriel, nous comparons nos résultats numériques avec des résultats de mesure. A la connaissance de l'auteur, la comparaison du modèle Darwin avec des résultats de mesure réels n'a pas été rapportée dans la littérature. Ensuite, avec un exemple académique, nous avons comparé tous les modèles quasistatiques dans le domaine fréquentiel, en tenant compte de différents aspects numériques, à savoir la densité de courant, le champ électrique, le champ magnétique et l'impédance.

L'article est organisé comme suit : La section 2 présente les modèles EQS, MQS et Darwin. Dans la section 3, deux exemples différents, une application industrielle et un dispositif électromagnétique académique, sont étudiés. Enfin, une conclusion est donnée dans la section 4.

2. DIFFÉRENTS MODÈLES QUASISTATIQUES

Dans cette section, les trois modèles quasistatiques EQS, MQS et Darwin seront présentés.

2.1. Le modèle d'EQS : formulation φ

Pour un modèle EQS, le champ électrique \mathbf{E} est un champ à rotationnel nul. Ainsi, un potentiel scalaire électrique φ tel que $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ est introduit. Dans le domaine fréquentiel, la formulation en potentiel à résoudre pour l'EQS basée sur la loi de conservation de la charge est la suivante

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi + j\omega \varepsilon \nabla \varphi) = 0 \quad (1)$$

où σ est la conductivité électrique et ε est la permittivité électrique.

2.2. Le modèle de MQS : formulation \mathbf{A}/φ

Pour un modèle MQS, le potentiel magnétique vectoriel \mathbf{A} tel que $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ est introduit, et φ n'est défini que dans le sous-domaine conducteur comme suit $\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\varphi$. Donc, la formulation du potentiel \mathbf{A}/φ pour le modèle MQS est la suivante

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi)) = 0 \quad (3)$$

où ν est la reluctivité magnétique (l'inverse de la perméabilité magnétique μ).

2.3. Le modèle de Darwin : formulation \mathbf{A}/φ

La formulation classique \mathbf{A}/φ du modèle de Darwin sans les conditions de jauge données dans [7] est la suivante

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) + j\omega\epsilon\nabla\varphi = \mathbf{0}, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot (-\sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) - j\omega\epsilon\nabla\varphi) = 0. \quad (5)$$

Comme aucune jauge n'est appliquée, le système d'équations (4)-(5) n'a pas de solution unique pour le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} , ce qui signifie que le système est singulier. Cependant, les quantités physiques (telles que la densité de flux magnétique \mathbf{B} et le champ électrique \mathbf{E}) sont uniques. Pour garantir l'unicité du potentiel \mathbf{A} , la jauge de Coulomb implicitement imposée par le solveur itératif [12] ou/et par le solveur direct [13] peuvent être utilisée.

Pour éviter de résoudre le problème du point selle, basée sur la formulation proposée dans [9] où une condition de type Coulomb a été ajoutée pour la régularisation, on applique la méthode du double multiplicateur de Lagrange qui consiste à dupliquer le scalaire p en deux inconnues scalaires notées p_1 et p_2 avec $p_1 = p_2$ [11]. La formulation proposée en fréquentiel s'écrit

$$\begin{aligned} \text{rot}(\nu \text{rot } \mathbf{A}) + \sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) + j\omega\epsilon\nabla\varphi \\ - j\omega\epsilon\nabla p_1 - j\omega\epsilon\nabla p_2 = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot (-\sigma(j\omega\mathbf{A} + \nabla\varphi) - j\omega\epsilon\nabla\varphi) - j\omega\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{A}) = 0, \quad (7)$$

$$j\omega\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{A}) + p_1 - p_2 = 0, \quad (8)$$

$$j\omega\nabla \cdot (\epsilon\mathbf{A}) + p_2 - p_1 = 0. \quad (9)$$

Il est indiqué ici que la formulation proposée introduit plus d'inconnus nodaux, mais est une bonne alternative pour résoudre les problèmes que nous rencontrons dans les applications industrielles.

3. APPLICATIONS

Toutes les formulations présentées dans les sections précédentes ont été mises en œuvre dans notre logiciel [code_Carmel](#) qui fournit les résultats de la simulation numérique. Deux exemples différents sont présentés ci-après. Pour le premier exemple, nous avons validé les résultats de simulation obtenus avec le modèle Darwin en considérant un transformateur industriel. Les données de mesure expérimentales, réalisées dans le cadre d'un test de mode commun, sont fournies jusqu'à 100 MHz. Cependant, sur la base des résultats de mesure, il convient de mentionner ici que le modèle de Darwin n'est pas valide lorsque la fréquence est supérieure à 10 MHz car les effets de rayonnement ne sont plus négligés. Lorsque la fréquence augmente, pour gérer l'effet de peau à la périphérie des enroulements, il faut plus d'éléments dans le maillage, ce qui constitue un défi scientifique sur le plan numérique. Pour notre calcul, le nombre total de degrés de liberté (DoFs) a atteint 40 millions d'éléments. Le second, qui représente un exemple d'inductance, est présenté afin d'étudier l'influence de la fréquence sur les distributions du champ électromagnétique et de comparer les courbes d'impédance calculées par chaque modèle, à savoir les modèles EQS, MQS et Darwin.

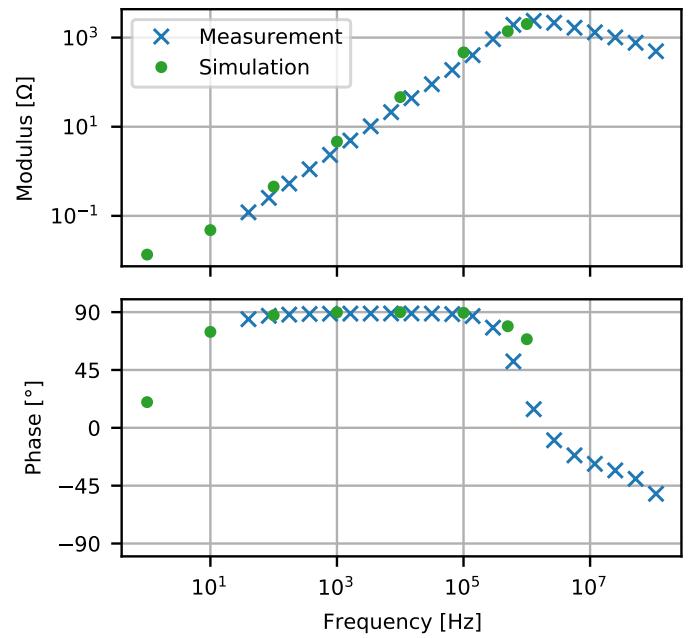


FIG. 3. Module d'impédance et phase calculés en fonction de la fréquence.

3.1. Transformateur toroïdal

Un transformateur toroïdal (voir Fig. 1 et Fig. 2) est considéré ici pour étudier la performance de notre formulation proposée (cf. [14] pour plus de détails).



FIG. 1. Noyau toroïdal à deux enroulements.

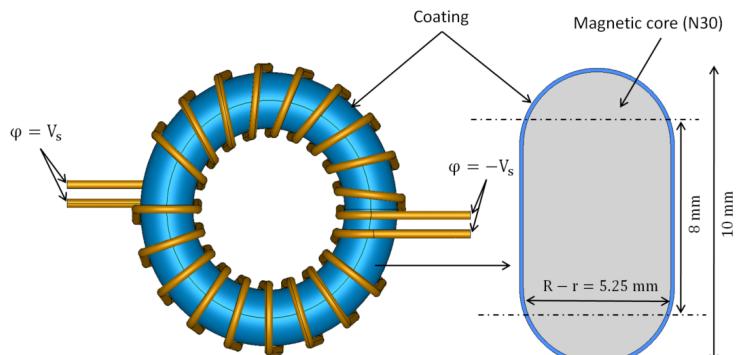


FIG. 2. Modèle 3-D du transformateur.

L'intervalle de fréquence est de $[0 : 10^6]$ Hz. Pour prendre en compte l'effet de peau, le maillage est adapté à toutes les fréquences jusqu'à 1 MHz. Ce dernier comporte 29 832 477 tétraèdres comprenant 5 257 323 nœuds et 35 093 396 arêtes. Pour

chaque fréquence, le temps de calcul avec le modèle de Darwin est d'environ 9 jours pour 40 338 477 DoFs avec le solveur BiCGSTAB.

Sur la Fig. 3, pour $f < 500$ kHz, les résultats de la simulation numérique du modèle de Darwin sont en bon accord avec les mesures. Jusqu'à cette fréquence les phénomènes présentent les effets résistifs-inductifs couplés accessible avec le régime magnéto-quasistatique (MQS). Près de la fréquence de résonance, environ 1 MHz (7ème point), on constate qu'on n'est plus dans le régime MQS et le résultat de la simulation montre un résultat proche aux mesures, juste avant la fréquence de résonance. Un comportement similaire peut être observé pour la phase en fonction de la fréquence.

3.2. Dispositif électromagnétique académique

Pour le deuxième exemple, nous nous intéressons à la détermination du domaine de validité des modèles EQS, MQS et de Darwin (cf. [14] pour plus de détails sur la géométrie présentée sur Fig. 4). L'objectif de cette partie est d'étudier l'influence de la fréquence sur la distribution des champs électromagnétiques, ainsi que sur l'impédance obtenue en utilisant les modèles mentionnés ci-dessus.

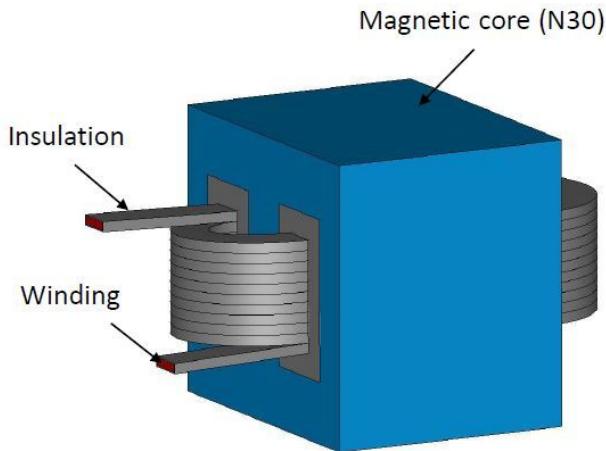


FIG. 4. Géométrie du dispositif électromagnétique.

Une tension sinusoïdale est appliquée entre les bornes de l'enroulement marqué en rouge, comme le montre la Fig. 4. L'intervalle de fréquence est $[0 : 10^5]$ Hz. Pour tenir compte des effets de peau dans l'enroulement pour les hautes fréquences, le maillage utilisé dans le modèle comporte 14 443 563 tétraèdres, dont 2 466 531 noeuds et 16 911 563 arêtes. Pour le modèle EQS, le nombre de DoFs est de 2 466 002 et le temps de calcul pour une fréquence est d'environ deux heures, alors qu'il est d'environ 75 heures par le modèle MQS avec 19 316 839 DoFs. Le temps de calcul par la formulation de Darwin est d'environ 86 heures pour 19 373 155 DoFs. Il convient de rappeler ici que le système matriciel associé à MQS est symétrique, ce qui n'est pas le cas pour le modèle de Darwin. Dans le cas général, le coût de calcul pour le modèle MQS est moins élevé que celui de Darwin en raison de la matrice mal conditionnée du modèle de Darwin, même des préconditionneurs différents peuvent être appliqués pour les cas MQS et Darwin. En outre, le coût de calcul du modèle EQS est relativement faible par rapport aux deux autres modèles.

Il convient de mentionner que le conditionnement de la matrice dépend de la fréquence pour les modèles MQS et Darwin. Par conséquent, le nombre d'itérations associé au solveur itératif, nécessaire pour atteindre la convergence de la solution, n'est pas le même. Par exemple, pour $f = 10$ kHz et avec un critère d'arrêt fixe, le nombre d'itérations associées pour BiCGSTAB est de 14k en utilisant le modèle MQS alors qu'il faut environ 17k pour le modèle Darwin comme le montre le tableau 1.

Formulations	DoFs	Itérations	Temps CPU
EQS	2 466 002	18k	$\simeq 2.5$ heures
MQS	19 316 839	14k	$\simeq 75$ heures
Darwin	19 373 155	17k	$\simeq 86$ heures

TABLEAU 1. Comparaison entre les différents modèles pour une fréquence $f = 10$ kHz.

3.2.1. Distribution des champs électriques et magnétiques

En basse fréquence, lorsque la fréquence tend vers zéro, la distribution de la densité de courant dans l'enroulement obtenue avec tous les modèles est similaire à celle observée dans la Fig. 5(a), puisque cela équivaut à résoudre un problème électrocinétique. Dans ce cas, la distribution de la densité de courant n'est influencée que par la géométrie de l'enroulement. Lorsque la fréquence d'alimentation de l'enroulement augmente, des effets couplés peuvent être observés. Pour représenter ces effets dans l'enroulement, la distribution de la densité de courant \mathbf{J} est présentée dans les Fig. 5(b)-Fig. 5(d). A $f = 10$ kHz, avec le modèle EQS, il est clair que \mathbf{J} ne sera plus homogène le long de l'enroulement par l'effet de courant de déplacement. D'autre part, la densité de courant avec les modèles MQS et Darwin est limitée à une petite couche à la limite de l'enroulement, et elle commence à s'écouler à la périphérie du conducteur, comme observé par l'effet de peau.

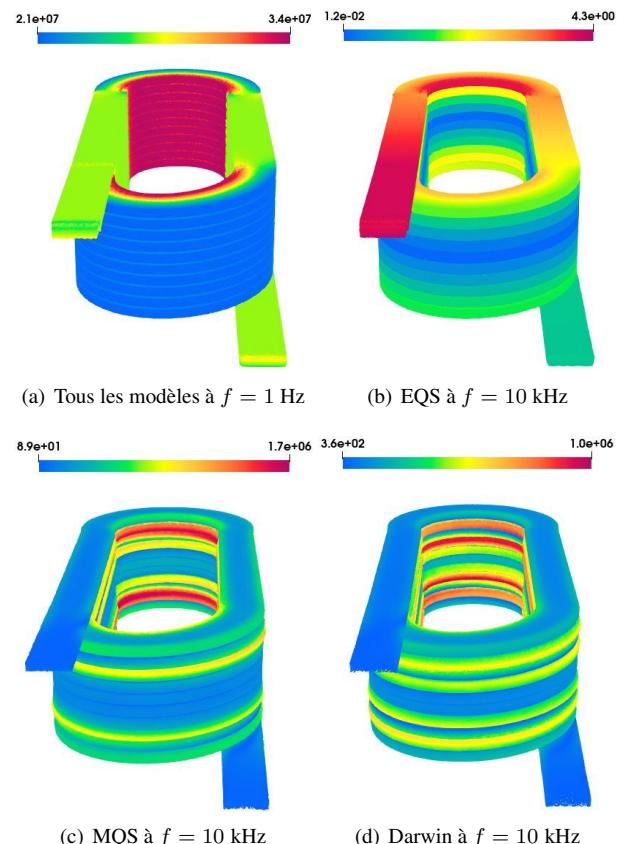


FIG. 5. Distribution de la densité de courant \mathbf{J} (A/m^2) dans le bobinage.

En outre, en raison des effets capacitifs, la distribution de la densité de courant obtenue avec le modèle de Darwin n'est pas la même que celle de MQS. La densité de courant irrotationnel est beaucoup plus importante que la densité de courant solénoïdal dans les deux cas, de sorte qu'il est impossible de distinguer le couplage capacitif sur la Fig. 5(d). La distribution du champ électrique obtenue à partir du modèle de Darwin est présentée à

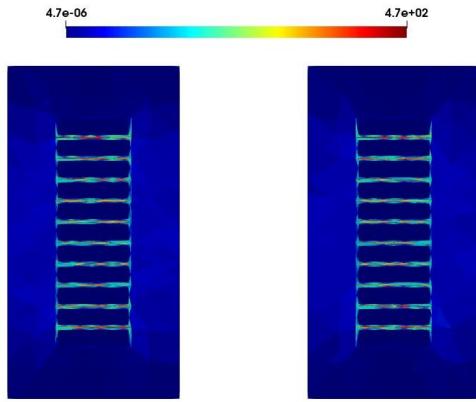


FIG. 6. Distribution du champ électrique \mathbf{E} (V/m) entre les interstices de l'enroulement à $f = 10$ kHz.

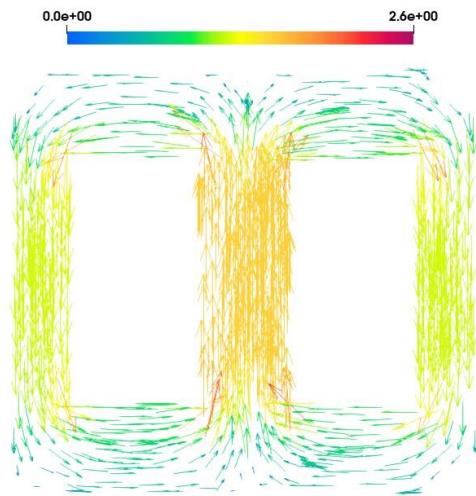


FIG. 7. Distribution de la densité de flux magnétique \mathbf{B} (T) dans le noyau magnétique à $f = 1$ Hz.

la Fig. 6 dans un plan de coupe 2-D pour $f = 10$ kHz. Un champ élevé apparaît dans les régions diélectriques, en particulier entre les interstices de l'enroulement.

Lorsque les effets capacitifs sont négligés pour les basses et moyennes fréquences, les problèmes de MQS et de Darwin donnent la même distribution de la densité du flux magnétique. Ensuite, lorsque la fréquence tend vers zéro, la distribution de la densité du flux magnétique obtenue à partir des modèles MQS et Darwin est équivalente à celle issue d'un problème magnéto-statique comme le montre la Fig. 7.

L'évolution du module d'impédance et de sa phase, en fonction de la fréquence obtenue à partir des modèles EQS, MQS, et Darwin, sont présentées sur Fig. 8. Aux basses fréquences, l'impédance Z correspond à la résistance continue du bobinage. Lorsque la fréquence augmente, l'effet de peau apparaît dans le bobinage ; la valeur de la résistance de l'enroulement augmente. Cet effet n'est pas pris en compte avec le modèle EQS. Pour $f \in [0 : 10^3]$ Hz, les modèles MQS et Darwin donnent une évolution similaire de l'impédance et de la phase. Pour $f > 1$ kHz, l'influence des effets capacitifs apparaît sur l'évolution de l'impédance pour les modèles EQS et Darwin. Un comportement similaire peut être observé pour les deux modèles, ce qui indique que le modèle EQS peut être utilisé comme un indicateur de fréquence pour savoir quand appliquer le modèle de Darwin.

4. CONCLUSION

Dans ce travail, une formulation symétrique du modèle de Darwin est présentée et validée par des exemples numériques.

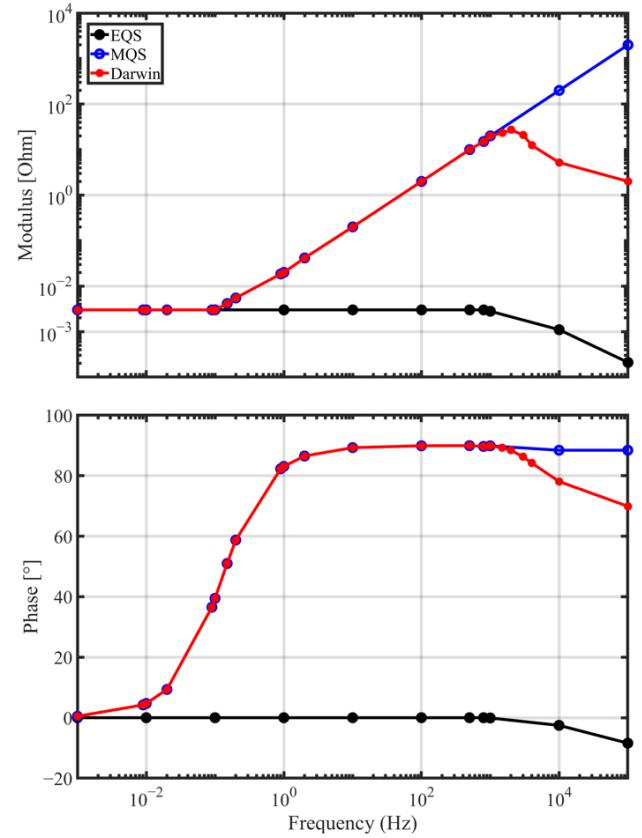


FIG. 8. Module d'impédance et phase calculés en fonction de la fréquence.

Pour le premier, les résultats de mesure ont été fournis pour valider les résultats de simulation obtenus avec le modèle Darwin, qui montre un bon accord, notamment autour de la fréquence de résonance. Pour le second, différents modèles, tels que les modèles EQS, MQS, et Darwin, sont comparés en calculant leurs impédances ainsi que les différents champs électromagnétiques afin d'étudier leurs limites.

À basse fréquence, lorsque l'impédance présente un comportement résistif, le modèle EQS est suffisant. De plus, lorsque les effets inductifs ne sont pas négligés, les modèles MQS et Darwin peuvent être utilisés, mais le modèle MQS est préféré car son coût de calcul est moins élevé que celui du modèle Darwin. Cependant, dans les fréquences intermédiaires, en particulier autour de la fréquence de résonance, le modèle de Darwin doit être adopté car le modèle MQS ne peut pas gérer les effets capacitifs-inductifs couplés. En outre, le modèle EQS peut être utilisé comme indicateur pour connaître la fréquence à laquelle les effets capacitifs deviennent significatifs et où le modèle de Darwin doit être appliqué.

5. REMERCIEMENTS

Ce travail a été soutenu financièrement par le Fond Européen de Développement Régional (FEDER) NP0017752 et le laboratoire LAMEL (laboratoire commun entre l'Université de Lille, l'ENSAM, et la société EDF).

RÉFÉRENCES

- [1] H. Haus and J. Melcher, Electromagnetic Fields and Energy. Prentice Hall, 1989.
- [2] Z. Badics and J. Pávó, "Full wave potential formulation with low-frequency stability including ohmic losses," IEEE Transactions on Magnetics, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, 2015.

- [3] T. Steinmetz, M. Helias, G. Wimmer, L. O. Fichte, and M. Clemens, “Electro-quasistatic field simulations based on a discrete electromagnetism formulation,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, no. 4, pp. 755–758, 2006.
- [4] R. Hiptmair, F. Krämer, and J. Ostrowski, “A robust Maxwell formulation for all frequencies,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 44, pp. 682–685, Jun. 2008.
- [5] M. Bebendorf and F. Krämer, “Hierarchical matrix preconditioning for low-frequency-full-Maxwell simulations,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 101, no. 2, pp. 423–433, 2013.
- [6] J. Larsson, “Electromagnetics from a quasistatic perspective,” *American Journal of Physics*, vol. 75, 07 2006.
- [7] S. Koch, H. Schneider, and T. Weiland, “A low-frequency approximation to the Maxwell equations simultaneously considering inductive and capacitive phenomena,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 48, pp. 511–514, Feb. 2012.
- [8] M. Eller, S. Reitzinger, S. Schöps, and S. Zaglmayr, “A symmetric low-frequency stable broadband Maxwell formulation for industrial applications,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 39, no. 4, pp. B703–B731, 2017.
- [9] Y. Zhao and Z. Tang, “A novel gauged potential formulation for 3-D electromagnetic field analysis including both inductive and capacitive effects,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 55, pp. 1–5, June 2019.
- [10] M. Clemens, B. Kähne, and S. Schöps, “A Darwin time domain scheme for the simulation of transient quasistatic electromagnetic fields including resistive, capacitive and inductive effects,” in *2019 Kleinheubach Conference*, pp. 1–4, 2019.
- [11] H. Taha, Z. Tang, T. Henneron, Y. Le Menach, J.-P. Ducreux, and F. Salomez, “Stabilized gauged formulation of Darwin model for FEM computation of industrial applications,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 58, no. 9, pp. 1–4, 2022.
- [12] Z. Ren, “Influence of the RHS on the convergence behaviour of the curl-curl equation,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, no. 3, pp. 655–658, 1996.
- [13] Z. Tang, Y. Zhao, and Z. Ren, “Auto-gauging of vector potential by parallel sparse direct solvers—numerical observations,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 55, no. 6, pp. 1–5, 2019.
- [14] H. Taha, Z. Tang, T. Henneron, Y. Le Menach, F. Salomez, and J.-P. Ducreux, “Numerical simulation-based investigation of the limits of different quasistatic models,” *Applied Sciences*, vol. 11, no. 23, 2021.