

Étude de la Projection des Forces Magnétiques pour le Calcul des Vibrations dans les Machines Électriques

Raphaël PILE^{1,2,3}, Jean LE BESNERAIS¹, Yvonnick LE MENACH², Guillaume PARENT³,
Thomas HENNERON², and Jean-Philippe LECOINTE³

¹ EOMYS ENGINEERING, Lille-Hellemmes 59260, France

² Univ. Lille, Arts et Metiers ParisTech, Centrale Lille, HEI, EA 2697 - L2EP - Laboratoire d'Électrotechnique et d'Électronique de Puissance, F-59000 Lille, France

³ Univ. Artois, UR 4025, Laboratoire Systèmes Électrotechniques et Environnement (LSEE), F-62400 Béthune, France

De nombreux travaux récents traitent du calcul des forces magnétiques afin d'estimer le bruit et les vibrations dans les machines électriques. La principale difficulté réside dans la méthodologie d'identification des ondes de forces tournantes les plus bruyantes. Les deux méthodes utilisées pour calculer les forces magnétiques sont le Principe des Travaux Virtuels (PTV) et le Tenseur de Maxwell (TM). Cette communication traite des vibrations obtenues sur une machine à aimants en surface grâce à une résolution électromagnétique Éléments Finis (EF) 2-D et à une simulation mécanique harmonique EF 3-D. Les résultats de deux calculs distincts sont comparés : un cas avec le PTV, et l'autre cas basé sur le TM. En particulier, le but de ce travail est d'étudier l'effet de modulation dentaire qui a pour conséquence de filtrer les ondes tournantes de forces calculées avec le TM à cause de la nature discrète des dents du stator. Deux méthodes différentes de la littérature sont étudiées pour tenir compte de l'effet de modulation. Ces méthodes sont comparées par rapport au PTV pour la machine 36s18p étudiée. Ce travail montre qu'une des deux méthodes est plus pertinente que l'autre.

Vibration, Machines électriques, Force magnétique, Magnéto-mécanique, Tenseur de Maxwell, Principe des travaux virtuels.

1. INTRODUCTION

L'analyse du comportement vibro-acoustique des machines électriques est le sujet de nombreux travaux récents. Le problème est même accru dans la mesure où l'accroissement des puissances massiques et volumiques impacte les niveaux vibratoires et sonores. Ces phénomènes doivent être pris en compte dès la conception ; l'un des moyens pour y parvenir est d'avoir recours à la simulation. Un point crucial de ces simulations est la modélisation des forces Electro-Magnétiques (EM).

Dans ce contexte, la méthode la plus couramment utilisée est le Tenseur de Maxwell (TM) : une force surfacique équivalente est estimée dans l'entrefer à partir de la connaissance du champ magnétique à cet endroit. Le TM a l'avantage d'être compatible avec les méthodes analytiques, semi-analytiques et Éléments Finis (EF) [1]. Grâce à l'analyse harmonique, le TM permet d'identifier les ondes de force tournantes les plus gênantes en terme de bruit et vibrations. Le but de cette analyse est généralement de résoudre les problèmes de vibration avec un minimum d'effet sur les performances [2]. Pour réaliser cette analyse, le TM est décomposé dans la base de Fourier selon ses nombres d'ondes angulaires (aussi appelés ordres spatiaux [2], ou encore pulsation spatiale [8]). Dans le cas d'un couplage avec une simulation mécanique EF, le TM est généralement intégré pour appliquer une force résultante par dent [3].

Une autre méthode utilisée est le Principe des Travaux Virtuels (PTV) : appliqué à la méthode des EF, le PTV donne une résultante d'effort magnétique nodale [4]. Le PTV est la méthode de référence pour le calcul des forces locales (notamment

sur le bout des dents). Cependant, le résultat est par nature ponctuel, et dépend intrinsèquement du maillage sur lequel il est calculé [5]. Sa décomposition sur une base de Fourier spatiale n'est pas immédiate. C'est donc un outil moins pratique que le TM pour l'analyse et le diagnostic de l'origine des phénomènes de vibration dans les machines électriques.

D'après les travaux récents [1, 3, 10], la corrélation entre le TM et le PTV semble bonne pour les nombres d'onde et harmoniques les plus faibles. Cependant, peu d'études comparent directement les résultats vibratoires du PTV avec le TM pour les vibrations d'origine EM. En effet, le résultat du PTV donne une résultante calculée par rapport au maillage magnétique. Dans ces conditions, la projection sur un maillage mécanique n'est pas immédiate, alors que les maillages magnétiques ne sont pas toujours adaptés pour calculer un résultat EF vibratoire précis. De plus, l'algorithme du PTV doit être adapté pour chaque type d'élément et de résolution, contrairement au TM.

Pour ces raisons, cette étude propose de construire un cas qui permet de simuler directement le déplacement issu d'un chargement PTV. Pour réaliser cela, on conserve le maillage magnétique pour la simulation EF mécanique. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser des méthodes de projection maillage magnétique sur maillage mécanique comme dans [5]. La simulation magnétique a été construite afin de limiter l'impact des irrégularités et des asymétries du maillage magnétique sur le résultat mécanique. Le résultat vibratoire est comparé à différents chargements TM avec un maillage mécanique.

Cette simulation PTV de référence permet d'étudier de manière purement numérique l'effet de modulation mécanique [6, 7] : la réponse mécanique à une force de nombre d'onde élevé n'est pas nécessairement négligeable. De plus cette réponse pourrait être estimée à partir de la réponse des nombres d'ondes les plus faibles. Ce phénomène peut s'expliquer par la nature discrète des dents du circuit magnétique qui agissent comme un peigne de Dirac sur le signal du TM. Cette étude propose de vérifier numériquement l'ampleur de cet effet et la validité des méthodes proposées [6, 7]. Pour cela, les modèles de modulation proposés sont comparés par rapport au calcul direct basé sur le PTV, en particulier pour un nombre d'onde de force égal au nombre d'encoches au stator comme dans [7]. Cette étude se limite aux forces radiales afin de pouvoir comparer les différents modèles proposés pour l'effet de modulation.

2. CALCULS DES FORCES D'ORIGINE MAGNÉTIQUE

2.1. Tenseur de Maxwell

Cette section présente le principe du calcul des forces magnétiques avec le TM, ainsi que la méthode d'application des efforts sur le modèle mécanique. La méthode classique consiste à prendre un contour circulaire dans l'entrefer sur lequel est dé-

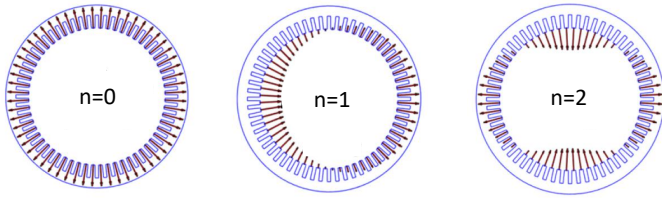


Fig. 1. Ondes de forces radiales tournantes intégrées par dent en fonction du nombre d'onde n .

fini la force surfacique à la position angulaire $\alpha \in [0, 2\pi]$ et l'instant t à partir de la perméabilité du vide μ_0 et de l'induction radiale B_r et tangentielle B_t [1] :

$$\sigma_r(\alpha, t) = \frac{B_r(\alpha, t)^2 - B_t(\alpha, t)^2}{2\mu_0} \quad (1)$$

Historiquement, cette méthode repose sur le théorème de Green-Ostrogradski pour calculer le couple et le déséquilibre résultant des forces magnétiques. Son extension au calcul des forces d'origine magnétique s'appliquant sur les dents est une approximation utilisée pour le diagnostic des problèmes de vibration dans les machines électriques [1, 2, 3, 8].

En appliquant une décomposition de Fourier selon le temps et la position angulaire, on obtient les harmoniques selon :

$$\sigma_r(\alpha, t) = \sum_n \sum_\omega \hat{\sigma}_r(n, \omega) e^{jn\alpha} \quad (2)$$

avec ω la pulsation temporelle, n le nombre d'onde spatial. Ainsi, cette force surfacique est définie dans l'entrefer sans être rattachée à une surface physique pour appliquer les efforts. Il est donc nécessaire de construire le chargement à appliquer sur le modèle mécanique. Une méthode consiste alors à intégrer le morceau de l'onde qui correspond à chaque dent de position angulaire α_i avec $i \in [1, Z_s]$ en ne considérant qu'un seul nombre d'onde $\hat{\sigma}_r(n, \omega)$. Cette intégration se fait sur une ouverture angulaire γ qui prendra différentes valeurs dans cette étude.

La linéarité mécanique permet de considérer indépendamment chaque nombre d'onde. On peut alors simuler uniquement les forces de nombre d'onde ayant un impact significatif [8, 9]. On obtient ainsi la force radiale correspondante sur la $i^{\text{ème}}$ dent située à la position angulaire α_i :

$$F_{r,i}(n, \omega) = R_s L_s \frac{2}{n} \sin(n \frac{n\gamma}{2}) \hat{\sigma}_r(n, \omega) e^{jn\alpha_i} \quad (3)$$

Le chargement utilisé pour la simulation mécanique correspond ainsi à des ondes de forces radiales tournantes intégrées par dent comme illustrée sur la Fig. 1.

Ensuite, on réalise une simulation EF mécanique par nombre d'onde avec chaque dent chargée selon (3). En particulier, une méthode classique consiste à charger la simulation obtenue avec une onde d'amplitude unitaire [8] :

$$\hat{\sigma}_r(n, \omega) = 1 \quad (4)$$

Le résultat du déplacement $Y_{\text{unit}}(n, \omega)$ ainsi obtenu est normalisé pour la force surfacique. On peut ainsi rapidement calculer différent cas de chargement et à des vitesses variables sans recommencer la simulation mécanique [3, 8]. Le résultat qui correspond au chargement magnétique simulé peut être reconstruit a posteriori selon :

$$Y(n, \omega) = \hat{\sigma}_r(n, \omega) Y_{\text{unit}}(n, \omega) \quad (5)$$

Cette méthode s'appelle la Synthèse des Vibrations Électromagnétiques (SVE). Elle repose sur l'hypothèse de linéarité mécanique, qui est une hypothèse généralement utilisée pour la résolution des problèmes de vibration dans les machines électriques en raison de la petite amplitude des déplacements considérés [8].

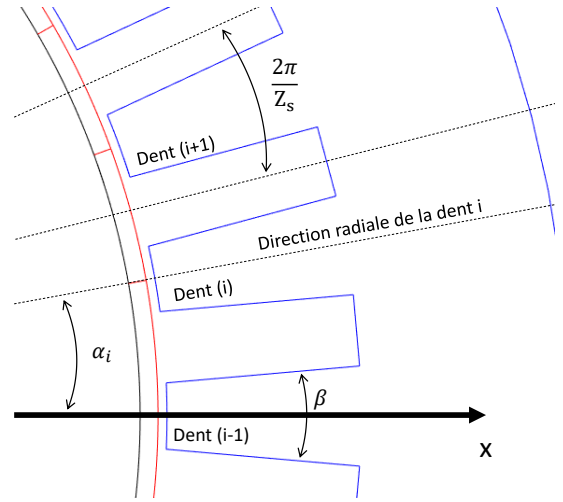


Fig. 2. Ouvertures angulaires pour l'intégration des forces surfaciques.

2.2. Effet de modulation

Dans la méthodologie classique pour diagnostiquer les problèmes de vibration dans les machines électriques, on peut montrer que les premiers modes d'ovalisation sont responsables de la quasi-totalité du niveau de vibration au moins pour le bruit généré directement depuis la surface du stator. En effet, ce bruit est inversement proportionnel à la quatrième puissance du nombre d'onde considéré.

De plus, il est courant de supposer que, quand la forme des excitations ne correspond pas à la forme des modes, la participation modale de cette excitation est négligée. Ainsi, les forces de nombre d'onde relativement élevé sont négligées [2, 3] (souvent $n > 8$ dans les applications automobiles). Cependant, des études récentes [6, 7] ont mis en évidence la présence d'un effet dit de modulation : une force de nombre d'onde n élevé (2) va être aussi perçue par la culasse comme une force de nombre d'onde $m = n + kZ_s$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Cela signifie que même les forces de nombre d'onde élevés peuvent exciter des modes d'ovalisation de rang faible du stator. Ainsi le déplacement $Y(n, \omega)$ peut être estimée grâce à $Y(m, \omega)$ selon :

$$Y(n, \omega) = K_{\text{mod}}(n, m) Y(m, \omega) \quad (6)$$

C'est un résultat très intéressant pour réduire le temps de simulation mécanique, car cela signifie qu'en simulant une petite partie des forces de nombre d'onde $n \leq Z_s/2$, on peut reconstruire avec la SVE la contribution de tous les nombres d'ondes restants.

Plusieurs expressions sont proposées dans la littérature pour déterminer K_{mod} . Cela dépend principalement de l'ouverture angulaire γ choisie pour calculer (3). Dans tous les cas étudiés [6, 7], le principe est de considérer qu'une fois la force de nombre d'onde n intégrée selon (3), le signal est échantillonné par les dents. Ainsi, pour $m > \frac{Z_s}{2}$, le critère de Shannon implique un repliement du signal sur m avec $m = n \pm kZ_s$ pour $k \in \mathbb{N}$. Si on inverse le processus d'intégration (3) pour obtenir une force équivalente au niveau de la culasse, cela revient à diviser par un coefficient :

$$K_n(\gamma) = \frac{2}{n} \sin(n \frac{n\gamma}{2}) \quad (7)$$

Ainsi, dans la méthode de [6] appelée TM-FANG, la force radiale tournante est intégrée sur le pas dentaire $\gamma = 2\pi/Z_s$ comme illustré sur la Fig. 2, de sorte que :

$$K_{\text{mod}}(m, n) = \frac{K_n(\frac{2\pi}{Z_s})}{K_m(\frac{2\pi}{Z_s})} = \frac{m \sin(n\pi/Z_s)}{n \sin(m\pi/Z_s)} \quad (8)$$

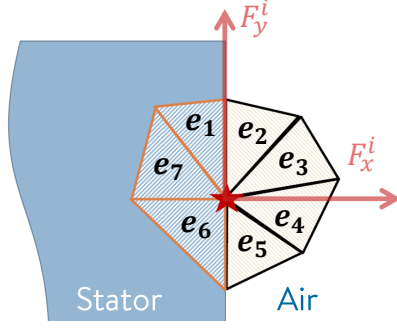


Fig. 3. Principe d'intégration du PVT élément par élément pour calculer la résultante qui s'applique sur le nœud commun d'après [4].

Mis bout à bout, ces portions d'intégrations forment un contour circulaire fermé dans l'entrefer. Cette méthode a donc l'avantage d'être cohérente avec l'application historique du TM pour calculer le couple.

La méthode appelée TM-WANG [7] utilise une intégration sur l'ouverture angulaire $\gamma = \beta$ du bout de la dent comme illustré sur la Fig. 2 :

$$K_{\text{mod}}(m, n) = \frac{K_n(\beta)}{K_m(\beta)} = \frac{m \sin(n\beta/2)}{n \sin(m\beta/2)} \quad (9)$$

Cela est motivé par la localisation des efforts physiques radiaux, qui sont principalement localisés sur le bout des dents. Néanmoins aucune de ces deux études n'effectue de comparaison avec le PTV : on propose de traiter ce problème dans la Section 3.

2.3. Principe des Travaux Virtuels

D'après [4], la force magnétique résultante F_s^i sur un nœud par rapport à la direction spatiale $s \in \{x, y, z\}$ peut être calculée en dérivant la co-énergie magnétique sur les éléments e_j qui contiennent ce nœud :

$$F_s^i = \sum_{\forall e_j | i \in e_j} \int_{e_j} \left(-\mathbf{B}^T \mathbb{J}^{-1} \frac{\partial \mathbb{J}}{\partial s} \mathbf{H} + \frac{\mu}{2} |\mathbf{H}|^2 |\mathbb{J}^{-1}| \frac{\partial |\mathbb{J}|}{\partial s} \right) dV \quad (10)$$

avec $\mathbf{H}$ le champ magnétique, $\mathbf{B}$ le flux magnétique, et $\mathbb{J}$ la matrice jacobienne de chaque éléments. Le principe de cette intégration est illustré avec la Fig. 3. F_s^i est calculé en [N/m] dans le cadre d'une simulation magnétique 2D.

3. APPLICATION À UNE MACHINE SYNCHRONE

Une comparaison numérique des méthodologies est réalisée sur une machine synchrone à aimants permanents en surface. Les paramètres utilisés dans la simulation magnétique sont introduits dans la Table 1. La topologie choisie est constituée de $Z_s = 36$ encoches au stator, et de $p = 18$ paires de pôles. Les 36 aimants sont régulièrement placés sans interstices. Il n'y pas de bobinage ni de courant dans les encoches du stator. La saturation magnétique du matériau est faible, ce qui fait de cette machine un bon candidat pour la comparaison du TM avec le PTV [1]. Le spectre des forces surfaciques (calculées avec le TM) correspondant à cette machine est présenté à la Fig. 4. En négligeant les nombres d'ondes $n > 36$, cette machine a une force de nombre d'onde pulsatoire ($n = 0$) ayant deux origines :

- Soit dû à l'interaction pôle/encoche $Z_s - 2p = 0$
- Soit au fondamental $2p = 36$ qui se replie avec l'effet de modulation selon $\pm 36 \pm Z_s = 0$.

La simulation EF magnéto-statique est réalisée avec un maillage 2D triangle à l'aide du couplage entre le logiciel FEMM [11] et le logiciel MANATEE [12]. Grâce aux conditions de périodicité, la simulation EF magnéto-statique est réduite à

un seul pas dentaire : cela permet de symétriser le maillage afin de réduire le bruit numérique sur la simulation EF mécanique. Pour la même raison, on utilise un grand nombre d'éléments : 306000 faces triangulaires au total. Enfin, l'utilisation d'une bande de glissement entre le rotor et le stator permet de conserver le même maillage à tous les pas de temps.

Tableau 1. Paramètres utilisés pour la simulation à vide dans MANATEE [12].

Paramètre	Symbole	Valeur
Nombre de pôle	p	36
Nombre de dent au stator	Z_s	36
Épaisseur de l'entrefer	g	1.5 [mm]
Vitesse de rotation	N	1188 [RPM]
Fréquence électrique	f_s	356.4 [Hz]
Stator		M400-50A
Rayon d'alésage	R_s	132.5 [mm]
Épaisseur de culasse	H_{sy}	35 [mm]
Longueur des dents	H_{tooth}	32.5 [mm]
Rayon extérieur	R_{sy}	200 [mm]
Longueur de lamination	L_s	350 [mm]
Ouverture d'encoche	W_s	5.19 [deg]
Ouverture de dent	β	4.81 [deg]
Aimant permanent		Forme polaire
Induction rémanente	B_r	1 [T]
Perméabilité relative	μ_{rm}	1.05
Ouverture d'aimant	W_{mag}	0.0223 [rad]
Rayon maximum	R_{mag}	131 [mm]
Rayon minimum	R_{mag}	128 [mm]
Hauteur	H_{mag}	3 [mm]
Rotor		M400-50A
Rayon d'alésage	R_{rbo}	128 [mm]
Rayon de l'axe	R_{ry}	90 [mm]
Longueur de lamination	L_r	350 [mm]

D'après l'effet de modulation de la Section 2.2, on voit que les forces de nombres d'ondes (36, -36) sont susceptibles de se replier sur 0. Cependant, les deux méthodes présentées donnent des résultats significativement différents comme illustrés sur la Fig. 5. D'après (8) :

$$K_{\text{mod}}(\pm 36, 0) = 0 \quad (11)$$

tandis que ce n'est pas le cas avec (9). Cela signifie qu'il n'y a pas d'effet de modulation d'après (8) pour cette machine. Formulée autrement, la contribution de la force de nombre d'onde $n = \pm 36$ à la force dentaire intégrée (3) est nulle d'après (8), mais pas d'après (9). Afin de vérifier ces hypothèses, ces méthodes de chargement basées sur le TM vont être comparées avec un chargement basé sur le PTV.

Un exemple de résultat des forces radiales à partir du PTV (10) à un instant t obtenu pour cette étude est présenté à la Fig. 6 : on observe une importante concentration des efforts magnétiques dans les coins des dents à cause des effets de bords. On peut également deviner dans la Fig. 6 le nombre d'onde 36 qui domine le chargement de la machine (périodicité dentaire du chargement avec $Z_s = 36$).

Afin de réaliser une simulation EF mécanique harmonique avec le même chargement, le maillage de triangles 2-D est extrudé en 3-D sur 8 couches de même longueur, afin d'obtenir un maillage prismatique. Le chargement PTV est ensuite dupliqué sur les nœuds dans la longueur, excepté aux extrémités pour éviter les effets de bords.

La simulation EF mécanique est réalisée à l'aide du logiciel Actran [13]. Le résultat de la simulation EF est le déplacement harmonique calculé sur la surface externe de la culasse.

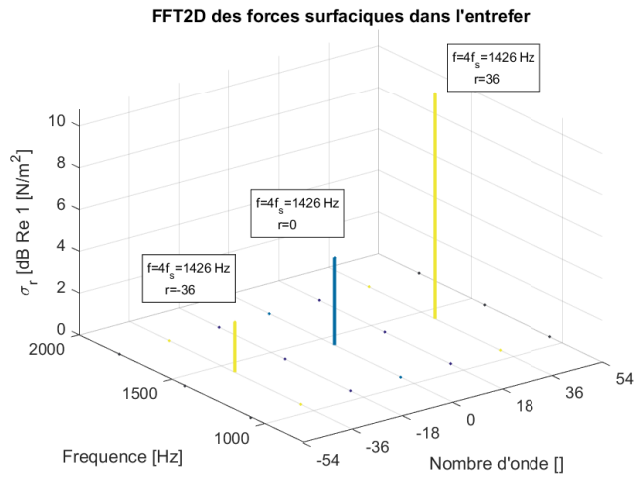


Fig. 4. Spectre des forces d'après le Tenseur de Maxwell dans l'entrefer en utilisant le logiciel MANATEE [12]

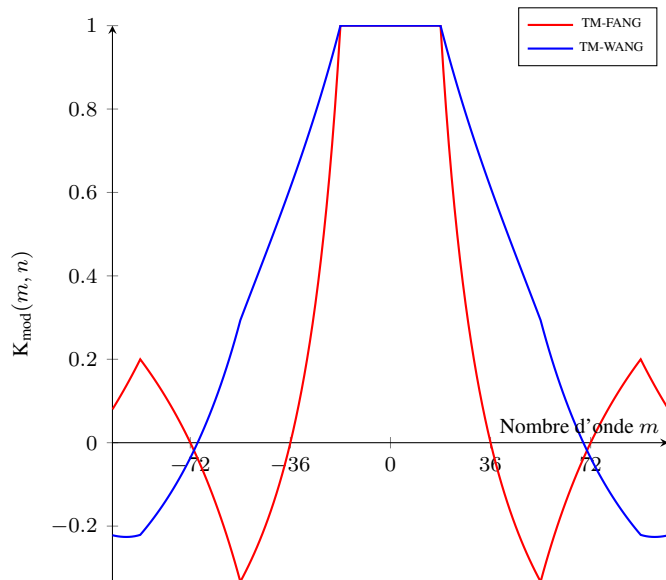


Fig. 5. Coefficient modulation $K_{\text{mod}}(n, m)$ en fonction du nombre d'onde m initial, puis $n \in [-18, +18]$ tel que $n = m + kZ_s$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

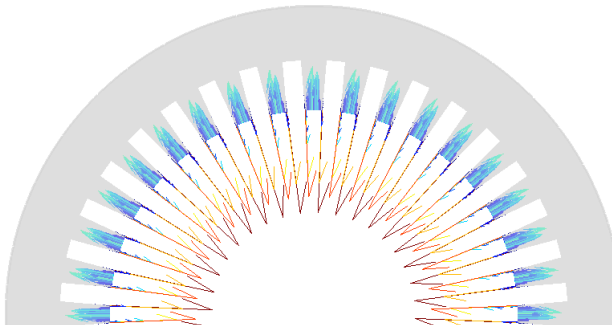


Fig. 6. Forces nodales calculées avec le PTV à 720 Hz. Visualisation dans le logiciel Actran VI [13]

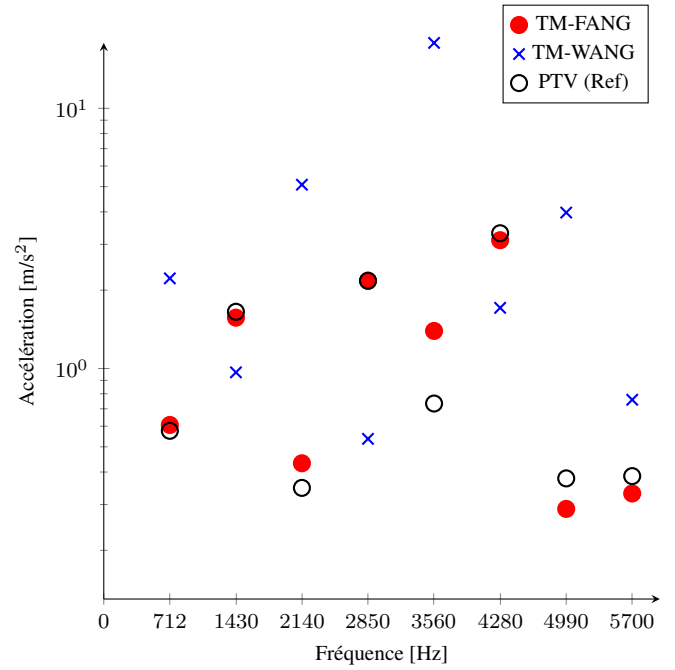


Fig. 7. Amplitude des déplacements (RMS) en fonction de la fréquence.

L'accélération du TM est obtenue en trois étapes :

- D'abord on simule la réponse en fréquence forcée pour une excitation unitaire $Y_{\text{unit}}(n, \omega)$ de nombre d'onde $n = 0$.
- Ensuite on calcule le déplacement opérationnel $Y(0, \omega)$ consécutif à la force de nombre d'onde 0 grâce à (5).
- Puis on calcule le déplacement opérationnel $Y(\pm 36, \omega)$ consécutif à la force de nombre d'onde ± 36 grâce à $Y(0, \omega)$ et (6).

On obtient ainsi le déplacement opérationnelle basé sur le TM :

$$Y(\omega) = Y(+36, \omega) + Y(0, \omega) + Y(-36, \omega) \quad (12)$$

sachant que l'amplitude de $Y(\pm 36, \omega)$ dépend de la formule (8) ou (9) choisie pour l'effet de modulation. La valeur RMS de ce déplacement est comparée au résultat basé sur le PTV. Le résultat de cette comparaison est présenté sur la Fig.7. On observe que la méthode TM-FANG donne un résultat beaucoup plus proche de la référence calculée avec le PTV par rapport à la méthode TM-WANG, en particulier pour la raie à $10f_s = 3564$ [Hz]. La méthode TM-FANG permet d'obtenir un résultat similaire au PTV avec une erreur inférieure à 5dB (Ref : $1e^{-6} \text{ m}^2$) jusqu'à 6000 Hz. Les différences pourraient s'expliquer par la contribution non négligeable des nombres d'ondes plus élevés, ou bien par les limites du modèle de force dentaire. Ces derniers points feront l'objet d'études ultérieures.

La méthode TM-WANG permet d'expliquer qualitativement l'effet de modulation, mais néglige une partie du signal des forces en face des encoches. La Fig. 7 montre que ce signal en face des encoches doit être pris en compte, comme cela était déjà suspecté dans [1].

4. CONCLUSIONS

Lors de cette étude, une méthodologie de validation pour le couplage magnéto-mécanique a été proposée dans le cadre de la simulation numérique du bruit et des vibrations dans les machines électriques. Les résultats de cette étude permettent de mieux expliquer l'intérêt du tenseur de Maxwell. En particulier, l'effet de modulation et deux méthodes pour le prendre en compte ont été étudiés. Les deux méthodes expliquent qualitativement l'apparition de l'effet de modulation par un échantillonnage dentaire des forces surfaciques d'entrefer basée sur le tenseur de Maxwell. Néanmoins, les formules proposées donnent des résultats significativement différents, notamment dans le cas où le nombre d'onde est égal au nombre d'encoches. Dans ce cas précis, l'une des méthodes prédit que la contribution de cette force au déplacement est nulle, en contradiction avec la deuxième méthode. Afin de départager ces deux prédictions, une machine 36s18p satisfaisant cette condition particulière a été étudiée numériquement. Une comparaison entre un chargement dentaire classique du tenseur de Maxwell et un chargement local calculé avec le principe des travaux virtuels a été réalisée. La simulation montre clairement que l'effet de modulation est limité dans ce cas. Cela permet donc de conclure que l'une des deux méthodes est nettement plus précise dans le cas étudié. De futurs travaux pourront s'interroger sur les limites de cette modélisation de forces dentaires, ainsi qu'à l'extension aux forces tangentielles et aux moments magnétiques.

5. RÉFÉRENCES

- [1] R. Pile, E. Devillers, & J. Le Besnerais, « Comparison of Main Magnetic Force Computation Methods for Noise and Vibration Assessment in Electrical Machines », in *IEEE Transactions on Magnetics*, 54(7), p. 1–13, 2018.
- [2] P. La Delfa, M. Fakam, M. Hecquet, & F. Gillon, « Outil de prédiction et d'identification des "ordres et fréquences" de la force radiale pour des machines synchrones à aimants permanents (MSAP) à bobinage dentaire », in *Symposium de Génie Électrique*, July 2014.
- [3] A. Saito, M. Kuroishi, & H. Nakai, « Vibration Prediction Method of Electric Machines by using Experimental Transfer Function and Magnetostatic Finite Element Analysis », in *Journal of Physics : Conference Series*, 744(1). 2016
- [4] J. Coulomb, & G. Meunier, « Finite Element Implementation of Virtual Work Principle for Magnetic or Electric Force and Torque Computation », in *IEEE Transactions on Magnetics*, 20(5), p. 1894–1896, 1984.
- [5] G. Parent, P. Dular, J.-P. Ducreux, & F. Piriou, « Using a galerkin projection method for coupled problems », in *IEEE Transactions on Magnetics*, 44, 830–833, 2008.
- [6] H. Fang, D. Li, R. Qu, & P. Yan, « Modulation Effect of Slotted Structure on Vibration Response in Electrical Machines », in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 66(4), p. 2998–3007, 2019.
- [7] S. Wang, J. Hong, Y. Sun, & H. Cao, « Analysis of Zeroth-Mode Slot Frequency Vibration of Integer Slot Permanent-Magnet Synchronous Motors », in *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 67(4), 2954–2964, 2020.
- [8] M. Boesing, T. Schoenen, K. A. Kasper, & R. W. De Doncker, « Vibration Synthesis for Electrical Machines Based on Force Response Superposition », *IEEE Transactions on Magnetics*, 46(8), 2986–2989, 2010.
- [9] M. Régniez, Q. Souron, P. Bonneel, & J. Le Besnerais, « Numerical simulation of structural-borne vibrations due to electromagnetic forces in electric machines—coupling between Altair Optistruct and Manatee software », 2016.
- [10] J. Hallal, F. Druesne, & V. Lanfranchi, « Study of Electromagnetic Forces Computation Methods for Machine Vibration Estimation », in *International Symposium on Electromagnetic Fields (ISEF)*, September 2013.
- [11] D. C. Meeker, *Finite Element Method Magnetics*, Version 4.2 (28 Feb 2018 Build), <http://www.femm.info>
- [12] MANATEE Software : Magnetic Acoustic Noise Analysis Tool for Electrical Engineering (v1.09.01), EOMYS ENGINEERING, 2020, <https://www.eomys.com/produits/manatee/article/manatee-software>.
- [13] Actran VI Software, Free Field Technologies, 2020, <https://www.fft.be/product/actran-vi>.