

Limites des modèles analytiques usuels pour le calcul des fréquences propres des machines électriques

Guillaume VEREZ, Christophe ESPANET

Moving Magnet Technologies, 1 rue Christiaan Huygens 25000 Besançon, France

RESUME – Cet article met l'accent sur la modélisation analytique des fréquences propres. Plutôt que de proposer de nouveaux modèles, la généralité des modèles les plus utilisés (annulaires par la théorie des anneaux et des poutres, cylindriques par la théorie des coques minces) est mise à l'épreuve. Les modèles sont explicités avant d'être confrontés à des cas de stators différents pour analyser la pertinence des modèles analytiques face à l'influence de la carcasse, du bobinage, de la forme des dents, de l'épaisseur du noyau, et de la résine d'imprégnation. Des modèles éléments finis permettent de confronter les modèles analytiques. Ces premiers sont ensuite comparés à quelques mesures expérimentales pour validation.

Mots-clés - fréquences propres, modèles analytiques.

1. INTRODUCTION

Le cahier des charges destiné à la conception d'une machine électrique impose d'une part une ou des vitesses de rotation bien définies, impactant l'excitation magnétique, et d'autre part un encombrement donné, impactant les fréquences de résonance. Ainsi, s'il est nécessaire d'assurer une certaine accélération ou une puissance, les dimensions de la machine peuvent fortement impacter ses performances vibratoires et acoustiques. Pour une topologie donnée, par exemple s'il est nécessaire d'utiliser une machine synchrone à aimants permanents possédant un nombre fixe de pôles rotoriques et de dents statoriques, un bras de levier majeur en vue de réduire le bruit est de s'assurer que les fréquences propres ne sont pas excitées à la résonance. Dans un processus de pré-dimensionnement, où un éventail de possibilités est étudié, le calcul analytique des fréquences propres apparaît comme une solution séduisante en temps de calcul. Toutefois, la précision d'un modèle est relative, et dépend nécessairement des complexités de l'assemblage final de la machine comprenant non-exhaustivement la forme du noyau statorique (pas de vis, forme), la forme des dents (présence d'isthme, de fond de dent, congés), le feuillement du paquet de tôles (épaisseur des tôles, contact entre tôles), le type de bobinage (nombre de spires, type de résine, type de bobinage, présence de corps de bobine), la forme de la carcasse (ailettes, liaison carcasse/stator, forme des paliers), le rotor (liaison rotor/palier) et l'imprégnation.

De manière qualitative, il pourrait exister autant de modèles que de moteurs à concevoir. Le présent papier propose d'étudier la généralité des modèles les plus utilisés dans la littérature et donc de déterminer leurs limites. Il ne s'agit pas de s'arrêter à leur domaine de validité puisque d'une part les

modèles annulaires ou cylindriques ne devraient alors servir qu'à l'étude de ces formes et que d'autre part les modèles se basant sur des mesures expérimentales ne devraient s'appliquer qu'aux machines qui ont servi à la création du modèle. Il aurait été idéal d'arriver à cartographier la précision des modèles analytiques par rapport à des machines réelles, suivant leurs dimensions et leur assemblage, pour les premiers modes circonférentiels. A l'échelle de cet article, il est choisi d'étudier la pertinence des modèles selon un nombre défini de paramètres, impliquant qu'il est nécessaire d'arrêter une géométrie qui ne saurait être générale, et ce par rapport à des simulations par éléments finis. Ces dernières ont été validées par mesures expérimentales [1]. L'utilisation de modèles éléments finis est pratique pour peu que certaines hypothèses de travail soient appliquées sur notamment l'anisotropie et la non-homogénéité des matériaux, ainsi que les contacts entre matériaux. L'étude porte sur le calcul des fréquences propres correspondant à des déformées modales purement circonférentielles. Il est alors décidé d'utiliser des matériaux isotropes en plus de contacts parfaits entre matériaux pour simplifier la modélisation et le calcul. Les modèles analytiques étudiés sont basés sur un anneau épais chargé avec des dents et des enroulements au moyen de la théorie des anneaux [2]–[5] ou sur la mise en parallèle de coques minces cylindriques représentant le noyau statorique, les dents et les enroulements, et la carcasse [6]–[8].

Dans la section 2, les modèles analytiques les plus couramment rencontrés dans la littérature sont décrits. Dans la section 3, sont étudiées les limites de leur généralisation, par comparaison aux éléments finis. Trois explorations paramétriques sont détaillées. Enfin, des conclusions sont émises.

2. MODELES ANALYTIQUES

L'hétérogénéité et l'assemblage complexe d'une machine électrique les rend difficile à modéliser mécaniquement, que ce soit par des méthodes numériques ou analytiques. Des modèles homogènes peuvent cependant être utilisés en décomposant la machine en éléments simples à calculer, comme des poutres, des anneaux ou des cylindres.

2.1. Modèles annulaires

L'approche la plus commune consiste à représenter le stator d'une machine électrique par un anneau circulaire, en ne modélisant pas le rotor. En utilisant la théorie de l'élasticité de Hooke et la théorie des anneaux en découlant, le comportement

vibratoire d'un anneau mince (épaisseur négligeable devant le rayon) a pu être caractérisé par Hoppe en 1871 [2], [9]. Carter, en 1932, a soumis son utilisation au cas d'une machine électrique [10]. Dans ces équations, les effets dus aux contraintes de cisaillement et au moment d'inertie sont négligés, induisant des résultats inexacts. Jordan, en 1950, a pris en compte ces effets. Pour correspondre à leurs résultats expérimentaux, des termes correctifs ont été ajoutés par Lubcke et Voronetskii [11]. Pavlovsky, comme d'autres auteurs, ont par la suite décidé de généraliser la méthode à un maximum de machines en intégrant l'effet de denture de la culasse statorique, par une masse s'ajoutant à celle du noyau annulaire [11]. Ce type de modèle se retrouve dans le livre de Timar [5] et est associé aux développements de Fhrone en 1959. Des travaux récents utilisent ces équations [12]–[14] et al. et obtiennent des écarts de 3 à 18% sur les premiers modes circonférentiels par rapport à des mesures expérimentales (machine avec rapport longueur sur rayon L/R de 1.7) [15].

La complexité de la machine, avec sa carcasse pouvant prendre des formes spécifiques, suivant le mode de refroidissement ou pour s'adapter au milieu dans lequel elle est placée, creuse les écarts entre ces modèles analytiques et la mesure. La méthode de Rayleigh-Ritz, basée sur l'équation de Lagrange de deuxième espèce, a permis de modéliser l'effet de la carcasse [11], [16]. Cette méthode a été exploitée sur des cas de machines en 2-D [17], [18] et en 3-D [17], [19]. De faibles écarts de 0.7 à 1.5% par rapport à des mesures ont été observés sur une machine courte ($L/R = 0.8$) [11]. Pour des cylindres de différentes épaisseurs, des écarts de 0.3 à 5.5% ont été constatés [19]. Les meilleurs résultats sont obtenus pour des épaisseurs faibles. Néanmoins, les temps de simulation n'étant pas donnés, il est délicat de confronter ces méthodes avec des formules analytiques simplifiées à temps de calcul instantané, telles que retrouvées dans [5].

2.2. Modèles basés sur les coques minces cylindriques

Suivant sa longueur axiale, une machine est mieux représentée par un cylindre de section circulaire, creux, épais et de longueur finie (rayon non négligeable devant la longueur) que par un anneau. L'étude des coques minces cylindriques a précédé celle des cylindres épais. La théorie des coques a pour origine la théorie de l'élasticité à laquelle sont adjointes certaines hypothèses [20]. Il est ainsi considéré que les phénomènes sont invariants sur l'épaisseur de la coque [21]. Un historique de l'évolution de la méthode est présenté dans [22] et plus récemment dans [23]. Love est un des fondateurs de la théorie des vibrations des coques minces qui se base sur la théorie de l'élasticité et la résolution des équations du mouvement obtenues à partir des forces et moments résultants. Ces moments étant obtenus au moyen de petites déformations de la structure [8]. S'en est suivi l'apport de nombreux auteurs à la théorie des coques minces cylindriques suivant des considérations différentes entre déformations et déplacements et la longueur infinie ou finie du cylindre. Sont décrites dans l'ouvrage, communément admis comme référence [24], [25], de Leissa [8] les théories de Byrne, Flügge, Goldenveizer, Lur'ye, Novozhilov, Love, Timoshenko, Reissner, Naghdi, Berry, Sanders, Donnell, Mushtari et Vlasov. Une étude exhaustive des conditions aux limites appliquées aux extrémités du cylindre a été réalisée par la théorie de Flügge [26], [27]. L'effet des conditions aux limites sur les fréquences propres se révèle en pratique négligeable pour des nombres de modes circonférentiels élevés. Il est envisageable de considérer pour tous les cas une condition de bords en appui simple [27].

Les fréquences propres des carcasses cylindriques et lisses de moteurs sont, du fait de leur épaisseur, obtenues avec une

assez bonne précision au moyen de la théorie des coques mais ce n'est pas le cas d'une culasse statorique qui s'éloigne fortement du champ d'application de la théorie. Des travaux récents ont proposé son utilisation au cas d'une machine électrique en utilisant la décomposition proposée dans l'ouvrage de Giers, Wang et Lai [7], prenant pour origine les travaux de [6]. La machine est décomposée en plusieurs coques minces cylindriques, de même axe central. Un cylindre de longueur infinie représente le noyau statorique car il n'est pas contraint à ses extrémités, au même titre qu'un deuxième cylindre représentant les dents et les enroulements. Un troisième cylindre de longueur finie à bords en appuis simples représente la carcasse englobant le stator. Aux cylindres de longueur infinie correspondent des fréquences propres de modes strictement circonférentiels tandis qu'aux cylindres de longueur finie correspondent des fréquences propres de modes circonférentiels et longitudinaux. Une raideur équivalente est calculée pour chaque cylindre, à partir des fréquences [6]. Au moyen d'une mise en parallèle des différents cylindres, une raideur équivalente totale de la machine peut être calculée comme la somme des raideurs de chacun des cylindres. Une fréquence propre liée à un couple de modes circonférentiels et longitudinaux peut alors être calculée [28]. Pour une machine complète, des écarts de 1.5 à 20% sur les premiers modes circonférentiels par rapport à des simulations éléments finis ont été obtenus [7].

2.3. Modèles basés sur les cylindres épais

De manière similaire aux coques minces cylindriques, les cylindres épais de longueur infinie peuvent être étudiés au moyen de la théorie de l'élasticité 3-D [29]. Les déformations radiales, longitudinales et axiales sont les premiers termes du développement en série entière du déplacement dans la méthode approximative des « 3-modes » présentée entre autres dans [30]. Il n'existe pas de solution exacte pour étudier un cylindre épais de longueur finie à bords en appuis simples [31]. De ce fait, l'utilisation de la méthode des éléments finis (MEF) a permis l'analyse des cylindres creux et solides, libres ou à bords en appuis simples [31]. Un résultat qui utilise un développement en série du déplacement, analogue à celui présenté par [30], pour un cylindre à bords libres a été obtenu dans [32]. Ce résultat concorde avec ceux de [31]. La MEF apporte un intérêt particulier pour modéliser n'importe quelles conditions aux limites. Le comportement vibratoire des cylindres épais en résulte vivement [33].

La méthode de Rayleigh-Ritz a permis l'étude des vibrations des anneaux tridimensionnels de section quelconque dans [17]. Cette recherche exploratoire a contribué à l'utilisation de cette méthode au cas d'une machine électrique par le calcul des énergies potentielles et cinétiques dans le noyau statorique, et également dans les dents, enroulements et ailettes de refroidissement [34]. Des mesures expérimentales ont attesté de l'excellente précision des résultats obtenus avec cette méthode [35], [36]. Effectivement, des écarts de 0.2 à 3.3% sur les premiers modes circonférentiels et longitudinaux par rapport à des mesures expérimentales ont été observés (cylindre épais isotrope en acier $L/R = 0.8$, $R/h = 3$). Un cylindre épais de longueur finie a également été analysé au moyen de la méthode de Rayleigh-Ritz dans [24] puis simplifié par un changement de repère dans [37].

Les culasses statoriques des machines électriques étant feuillettées, l'étude du l'orthotropie due au feuillettage est d'importance, et passe par la prise en compte des effets des contraintes de cisaillement [8]. Quelques auteurs se sont intéressés aux conséquences de chacune des tôles, ce qui rend les calculs difficiles pour un nombre de couches élevé. L'étude

de l'influence globale du feuillement a été réalisée dans [38]. Pour un cylindre épais, feuilletté et à bords en appuis simple, des expressions ont été avancées [39]. Les autres conditions aux limites ont été étudiées dans [33].

2.4. Synthèse des modèles utilisés

Les modèles comparés dans cet article sont explicités à la suite. La **méthode 1** correspond à l'utilisation de la théorie de l'élasticité des anneaux à un anneau circulaire avec coupe transversale circulaire, sans contraintes [2], [9]. Ses modes de flexion dans le plan de l'anneau sont excités aux fréquences données par (1).

$$f_m^{\text{anneau}} = f_0 \alpha m m_- m_+^{-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

La fréquence propre du mode circonférentiel d'ordre 0, f_0 , est donnée par (2).

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R_n} \sqrt{\frac{E_n}{\rho_n}} \quad (2)$$

Le rayon moyen de l'anneau du noyau statorique est R_n . Son module de Young et sa masse volumique sont respectivement notés E_n et ρ_n . m_- et m_+ correspondent respectivement aux notations pour $(m^2 - 1)$ et $(m^2 + 1)$. Le terme α s'exprime à partir de l'épaisseur du noyau dans la direction radiale h_n selon (3).

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{h_n}{R_n} \quad (3)$$

L'application de l'équation (1) au problème de la vibration d'une culasse statorique est généralement effectuée en modifiant la masse volumique de l'anneau pour représenter la masse des dents et des enroulements [3], [40]. C'est le cas de la **méthode 2** avec laquelle les fréquences propres s'expriment selon (4).

$$f_m = f_m^{\text{anneau}} \frac{1}{\sqrt{k_{\text{add,rec}}^{(n,d)}}} \quad (4)$$

$k_{\text{add,rec}}^{(n,d)}$ est le terme correctif permettant de prendre en compte les effets de la masse en déplacement rectiligne. En notant M_n la masse du noyau et M_d celle des dents, ce terme est donné par (5).

$$k_{\text{add,rec}}^{(n,d)} = \frac{M_n + M_d}{M_n} \quad (5)$$

La **méthode 3** suppose la prise en compte d'un deuxième terme correctif pour les effets de la masse en rotation [4], [41], [42]. La géométrie des dents, avec leur hauteur dans la direction radiale, h_d , et leur largeur au niveau de l'entrefer, b_d , entre en considération dans ce terme décrit par (6).

$$k_{\text{add,rot}} = 1 + \frac{6N_d b_d (M_d + M_e)}{\pi h_n^3 R_n M_d} h_d \left(\frac{1}{3} h_d^2 + \frac{1}{2} h_n h_d + \frac{1}{4} h_n^2 \right) \quad (6)$$

Les fréquences propres sont alors données par (7).

$$f_m = f_m^{\text{anneau}} \left\{ 1 + \alpha^2 m_- m_+^{-\frac{1}{2}} \left[m^2 \left(4 + k_{\text{add,rot}} k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}^{-1} \right) + 3 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

$k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}$ est le terme $k_{\text{add,rec}}^{(n,d)}$ de (5) dans lequel la masse des enroulements est ajoutée au numérateur. L'expression (7) est similaire à l'équation (6) de [41] à un terme de diamètre près, rendant l'expression non homogène. Il est nécessaire de remplacer le terme D_s de Φ_m par D_s^2 .

Un résultat similaire à celui de la méthode 1 peut être obtenu en partant d'une coque mince cylindrique uniforme et en utilisant la conservation de l'énergie pour en déduire la fréquence propre du mode circonférentiel d'ordre 2, qui est généralement le premier mode d'intérêt [43]. La **méthode 4** en est le résultat pour lequel le noyau statorique est soumis à une charge verticale [42], [44]. Cette fréquence est donnée par (8).

$$f_2 = 1.0445 f_0 \alpha \sqrt{\frac{2}{\pi(1-\nu^2)(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi})}} \quad (8)$$

En calculant le terme en facteur de $f_0 \alpha$ pour un coefficient de Poisson de ν de 0.32, le résultat est 2.28. Par (1), le résultat est 2.68. La différence entre la méthode 5 et la méthode 1 est donc un rapport de 0.85 entre les deux résultats. La méthode 5 est également citée dans [41] mais la masse volumique dans l'expression de f_0 a été oubliée. La **méthode 5** est également une application de la conservation de l'énergie à une coque mince cylindrique pour en déduire la fréquence propre du mode 2, selon (9) [45].

$$f_2 = f_0 k \frac{h_n}{R_n} \quad (9)$$

Le coefficient k s'exprime en fonction de ν , h_n et R_n comme explicité dans l'équation (2) de [45]. Cette méthode est reprise dans [42] mais sans le terme R_n de (9), ce qui occasionne un très grand écart de valeur et rend l'équation non-homogène, certainement une erreur. Une troisième méthode proche de la précédente, et toujours basée sur les coques minces cylindriques, est présentée dans [42]. Cette **méthode 6** permet de calculer les fréquences propres selon (10).

$$f_m = f_0 \alpha \sqrt{\frac{1}{1-\nu^2} \left[m^4 - \frac{m^2(4-\nu)-2-\nu}{2(1-\nu)} \right]} \quad (10)$$

La **méthode 7** approxime les vibrations du stator à celles d'une poutre à bords en appuis simples [41], [46]. Les fréquences propres s'expriment selon (11).

$$f_m = f_0 \alpha \frac{1}{\sqrt{k_{\text{add,rec}}^{(n,d)}}} \sqrt{\frac{384gm^4}{5\pi^4}} \quad (11)$$

g est l'accélération de la pesanteur.

La **méthode 8** concerne les modes d'extension d'un anneau circulaire, soit les déformations radiales pures [9], [47]. Les fréquences propres sont exprimées selon (12).

$$f_m = f_0 m_+^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

La **méthode 9** est celle trouvée dans l'ouvrage de Timar [5] qui cite les travaux de Frohne en 1959. Les fréquences propres sont exprimées selon (13) dont le terme 83750 au numérateur a été remplacé par 837.5 selon les considérations de [43].

$$f_m = \frac{837.5}{R_n \sqrt{k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}}} \left\{ \frac{\alpha^2 m_- \left[m^2 \left(4 + k_{\text{add,rot}} k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}^{-1} \right) + 3 \right] + m_+}{2 \left(1 + \alpha^2 \left(m^2 \left(3 + k_{\text{add,rot}} k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}^{-1} \right) - 3 \right) \right)} \right\}^{1 \pm \left\{ 1 - \frac{4 \left(1 + \alpha^2 \left(m^2 \left(3 + k_{\text{add,rot}} k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}^{-1} \right) - 3 \right) \right) \alpha^2 m^2 m^2}{\left[\alpha^2 m_- \left[m^2 \left(4 + k_{\text{add,rot}} k_{\text{add,rec}}^{(n,d,e)}^{-1} \right) + 3 \right] + m_+ \right]^2} \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (13)$$

Le terme $k_{\text{add,rot}}$ donné par [5] est différent de l'équation (6) du présent article. Il est exprimé selon (14).

$$k_{\text{add,rot}} = 1 + \frac{6N_d b_d}{\pi h_n^3 R_n} h_d (4h_d^2 + 6h_n h_d + 3h_n^2) \quad (14)$$

La **méthode 10** est une modification de la méthode 3 en réalisant l'adjonction de termes de masses [7], comme montré dans l'équation (15).

$$f_m = \frac{f_m^{\text{anneau}}}{\sqrt{k_{\text{add,rec}}^{(\text{n,d,e})}}} \left\{ 1 + a^2 m_- m_+^{-1} \left[m^2 \left(4 + k_{\text{add,rot}} k_{\text{add,rec}}^{(\text{n,d,e})} \right) + 3 \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Le terme $k_{\text{add,rot}}$ présenté dans l'équation (5.12) de [7] n'est pas homogène en termes de longueur et il est donc réécrit selon (16), qui est un mélange des équations (6) et (14) du présent article.

$$k_{\text{add,rot}} = 1 + \frac{6N_d b_d (M_d + M_e)}{\pi h_n^3 R_n M_d} h_d \left(\frac{1}{3} h_d^2 + \frac{1}{2} h_n h_d + \frac{1}{4} h_n^2 \right) \quad (16)$$

La **méthode 11** exprime les contraintes de cisaillement en sus du moment d'inertie pour déterminer les vibrations radiales et tangentialles d'un anneau seul, représentant un stator encoché [48], [49]. L'équation (8) de [48] est un terme de pulsation et non de fréquence, il doit donc être divisé par 2π pour obtenir les fréquences propres selon l'équation (17) du présent article.

$$f_m = f_0 \left\{ \frac{1}{2(3\alpha^4 m_- + 1)} \left(\alpha^2 (4m^4 - m^2 - 3) + m_+ \right. \right. \\ \left. \left. - [m_+^2 + \alpha^4 (2(4m^4 - m^2 - 3)m_+ - 4m^2 m_-^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha^8 ((4m^4 - m^2 - 3)^2 - 12m^2 m_-^3)]^{\frac{1}{2}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Au lieu de modifier la masse volumique de l'anneau pour prendre en compte les dents, la **méthode 12** considère l'augmentation du moment d'inertie d'un anneau du aux dents [50]. Le problème aux valeurs propres (18), liant la raideur K , la masse M , les déplacements U et la force F , peut être résolu pour déterminer les fréquences propres.

$$([K] - \omega^2 [M]) \{U(t)\} = \{F(t)\} \quad (18)$$

Le système d'équation à résoudre selon trois directions, deux de déplacements dans le plan et une de rotation, est donné dans l'équation (29) de [50].

La **méthode 13** est la modélisation du noyau statorique par un anneau circulaire dont les dents et le bobinage sont considérés comme des masses ponctuelles positionnées le long de l'axe neutre [51]. Les fréquences propres sont obtenues par minimisation du quotient de Rayleigh, le rapport de l'énergie de déformation sur l'énergie cinétique. L'équation (M2) de [51] est utilisée.

Les dernières méthodes concernent les théories des coques minces cylindriques amplement décrites dans les travaux de Leissa [8] mais aussi de Soedel [23]. Dans le cas d'une seule coque mince cylindrique, les fréquences propres sont calculées selon (19).

$$f_m = f_0 \sqrt{\frac{\Omega_m^2}{(1 - \nu^2)}} \quad (19)$$

Les termes Ω_m sont les racines de l'équation du mouvement de la coque et prennent des formes différentes suivant les théories. Les théories utilisées sont celles de Donnell et Mushtari (**T1**), Love et Timoshenko (**T2**), Goldenveizer, Novozhilov, Arnold et Warburton (**T3**), Houghton et Johns (**T4**), Biezeno et Grammel (**T5**), Flügge (**T6**), Sanders (**T7**), Reissner, Naghdi et Berry (**T8**), Vlasov (**T9**), Epstein et Kennard (**T10**), une version simplifiée de celle de Kennard (**T11**) et les équations de la membrane (**T12**) [8]. Pour une coque sans conditions de bords (longueur infinie), les termes Ω_m sont donnés directement en fonction de m et α .

Pour une coque à bords en appuis simples, il est nécessaire de résoudre l'équation du troisième ordre en Ω_m^2 (20), n étant le mode longitudinal ou axial.

$$\Omega_{m,n}^6 - (K_2 + \alpha^2 \Delta K_2) \Omega_{m,n}^4 + (K_1 + \alpha^2 \Delta K_1) \Omega_{m,n}^2 - (K_0 + \alpha^2 \Delta K_0) = 0 \quad (20)$$

Les fréquences propres sont déterminées par (21) en remplaçant Ω_m par $\Omega_{m,n}$, qui est la plus petite racine de (20). Les coefficients $K_{x \in \{1,2,3\}}$ et $\Delta K_{x \in \{1,2,3\}}$ diffèrent suivant les théories T1 à T12. Pour d'autres conditions de bords, la théorie T2 de Love peut être développée avec d'autres approximations, comme explicité par Wang et Lai [52]. La théorie **T13** se base sur le calcul des fréquences propres selon le plus petit résultat des équations (13) à (15) de [52]. En négligeant les déflexions dans le plan de la théorie des coques de Donnell, à bords en appuis simples, une formulation simple mais approximative est donnée par Soedel [23]. C'est la théorie **T14**. La théorie **T15** est retrouvée dans ce même ouvrage. Une coque mince cylindrique orthotrope à bords en appuis simples est étudiée en partant des équations de Love et en utilisant les approximations de Donnell, Mushtari et Vlasov.

Les théories T1 à T15 sont appliquées au cas du noyau statorique seul dans les **méthodes 14 à 28**. Les **méthodes 29 à 43** utilisent la superposition des coques minces cylindriques décrite dans [6], [7] pour le noyau statorique et la carcasse cylindrique à bords en appuis simples. Les **méthodes 44 à 58** utilisent la même technique appliquée au cas le plus complet comprenant le noyau, la carcasse et un cylindre interne aux précédents représentant les dents et les enroulements. Enfin, les **méthodes 59 à 73** ne représentent que le cas du noyau statorique avec les dents et les enroulements, sans effet de bords.

3. DETERMINATION DE LA LIMITATION DES MODELES

3.1. Machine électrique étudiée

Les modèles présentés dans la section 2 ne présentent aucune information sur le bobinage autrement que leur masse. De plus, la carcasse n'est absolument pas prise en compte dans les méthodes 1 à 28 et 59 à 73 alors qu'une part écrasante des machines possède des paliers solides. La possible imprégnation du stator ne peut pas non plus être incluse. De manière à élargir les conclusions de cet article à un maximum de machines, il sera considéré une topologie à stator externe avec supports de paliers, cylindre de carcasse et encochage statorique. Le bobinage est considéré dentaire pour pouvoir supposer que le bobinage n'ajoute qu'une masse supplémentaire et pas de raideur à la machine, comme considéré dans toutes les méthodes analytiques présentées. L'influence des rayons et largeurs de la culasse ainsi que de la carcasse permettra de vérifier certaines limites des modèles analytiques.

Les paramètres de la machine sont donnés dans le tableau 1. Les valeurs de référence correspondent à la machine à partir de laquelle l'exploration paramétrique a été réalisée. Elle ne correspond pas à une machine réalisée mais le modèle éléments finis mécanique étudié a pu être confronté à celui d'une machine aux dimensions proches. La modélisation mécanique a été réalisée avec Code_Aster [53] et Salome-Meca [54]. La figure 1 présente les résultats de marteau de choc (courbe) sur une machine d'essai, comparé à ceux obtenus par le modèle éléments finis (traits verticaux). Cette machine possède un bobinage dentaire et une carcasse cylindrique comme dans les cas étudiés. D'autres machines ont été analysées au moyen du même modèle avec succès [1]. La modélisation éléments finis servira donc de référence pour les modèles analytiques étudiés.

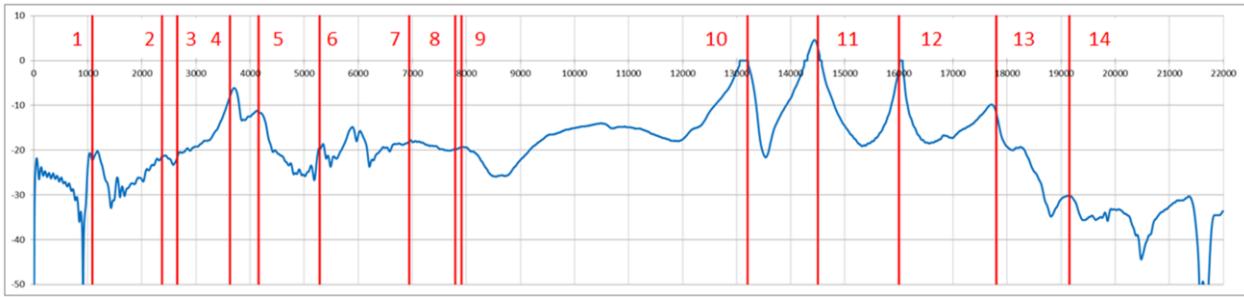


Figure 1. Comparaison entre modélisation éléments finis (traits verticaux rouge) et test au marteau de choc (courbe bleue).

Tableau 1. Paramètres de la machine.

Paramètre	Min.	Réf.	Max.
Nombre de dents		6	
Nombre de bobines		6	
Rayon externe du noyau statorique (mm)	45	50	55
Rayon interne du noyau statorique (mm)	34	40	44
Hauteur radiale des dents (mm)	15	20	25
Epaisseur circonférentielle des dents (mm)	3	10	13
Longueur axiale du stator (mm)		20	
Rayon externe de la carcasse (mm)	51	55	60
Longueur axiale de la carcasse (mm)		40	
Epaisseur des flasques de la carcasse (mm)	1	5	10
Module de Young des tôles (GPa)		205	
Coefficient de Poisson des tôles		0.32	
Masse volumique des tôles ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)		7850	
Module de Young des enroulements (GPa)		110	
Coefficient de Poisson des enroulements		0.34	
Masse volumique des enroulements ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)		4450	
Module de Young de la carcasse (GPa)		69	
Coefficient de Poisson de la carcasse		0.33	
Masse volumique de la carcasse ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)		2700	

Dans ce modèle, la taille des bobines s'adapte en fonction des dimensions des dents. Des vues de la machines sont proposées dans la figure 2, en fonction des extrema du tableau 1.

Le tableau 2 est le résultat du calcul de la fréquence propre du mode circonférentiel pur d'ordre 2 de la machine de référence par la méthode des éléments finis puis par les 73 méthodes analytiques présentées. Ce mode a été choisi car il est en général le premier à apparaître dans la bande de fréquence 20 Hz à 20 kHz et peut se révéler très bruyant ainsi que facilement excitable [55]. L'abréviation CMC du tableau fait référence aux Coques Mince Cylindriques. Plusieurs méthodes ne sont pas du tout adaptées à ce calcul. Les méthodes 7 et 8 qui concernent la poutre en appuis simples et un anneau en extension ne sont pas appropriées pour la recherche de ce mode, de par leur nature. La méthode 12 montre une erreur importante, ce qui laisserait présager un problème de programmation, alors que les résultats présentés dans [50] ont pu être reproduit fidèlement. La méthode n'est donc tout simplement pas adaptée à ce type de machine, comprenant un bobinage et une carcasse en sus de la culasse que la méthode ne fait que modéliser. La théorie des coques minces cylindriques de la membrane T12 doit être utilisée pour le cas d'une machine avec carcasse et donc cylindre fini. Le modèle orthotrope T15 est quant à lui très peu adapté au cas d'une machine électrique complète. Finalement, parmi les méthodes présentées, les théories des coques minces cylindriques pour une discréttisation du noyau ou du noyau avec sa carcasse par Donnell-Mushtari (T1) ou Flügge (T6) donnent les meilleurs résultats. A la suite, sont présentées des études paramétriques. L'erreur maximale admissible sera de 30% sur le mode 2.

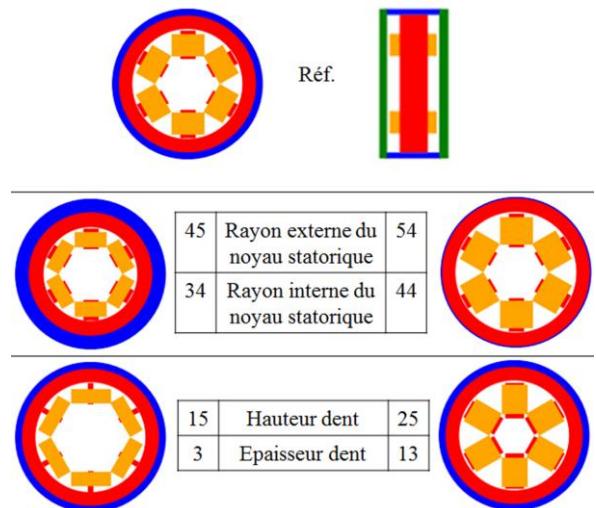


Figure 2. Vues de la machine suivant les paramètres extrêmes de la culasse statorique (rouge). La carcasse est en bleu.

3.2. Etude paramétrique sur la carcasse

La carcasse est modélisée par un cylindre fermé à ses extrémités. Le diamètre externe du cylindre est varié de 51 à 60 mm tandis que les flasques sont variés de 1 à 10 mm d'épaisseur. La condition aux limites reste inchangée, le cylindre est libre-libre. Il n'est pas possible de montrer les 73 résultats mais trois phénomènes sont observés, et montrés dans la figure 3. Le premier type de résultat (ici méthode 6) montre des modèles adaptés à une machine à cylindre de carcasse fin. C'est le cas des méthodes 1-6, 13, 15-18, 20-24, 26 et 40. Le deuxième type (ici méthode 46) concerne des modèles qui n'arrivent au contraire qu'à modéliser des carcasses épaisses. C'est le cas des méthodes 11 et 44-47. La troisième catégorie (ici méthode 34) concerne les méthodes qui se trouvent entre les deux premières, à savoir 14, 19, 27, 29-40 et 42. Pour finir, les méthodes qui donnaient des erreurs supérieures à 50% identifiées dans le tableau 2 présentent toutes des erreurs supérieures à 30% sur l'étendue des valeurs étudiées pour la carcasse. C'est donc le cas des méthodes 7-10, 12, 25, 28, 43, 49, 57, 58, 64, 70, 72 et 73. Ces méthodes ne sont pas exploitables pour les dimensions étudiées.

La réunion des trois catégories de la figure 3 permet d'étudier l'ensemble des paramètres de la carcasse. Pour une carcasse fine, les coques minces cylindriques ne modélisant que le noyau sont adaptées. Pour une carcasse moyenne, les coques minces cylindriques modélisant le noyau avec la carcasse sont plus adaptées. Enfin, pour une carcasse épaisse, les coques minces cylindriques modélisant le noyau, la carcasse et les dents sont nécessaires.

Tableau 2. Fréquence propre du mode circonférentiel 2.

Méthode	Fréq. (Hz)	Ecart abs. (%)
Eléments finis	4550	Réf.
1 Anneau : seul	3111	31,6
2 Anneau : masse des dents	2607	42,7
3 Anneau : géométrie des dents	2843	37,5
4 CMC (charge verticale)	2644	41,9
5 CMC : seule	2603	42,8
6 CMC : seule	3211	29,4
7 Poutre (appuis simples) : seule	10805	137,5
8 Anneau (extension) : seul	40414	788,2
9 Anneau : géométrie des dents	2199	51,7
10 Anneau : géométrie des dents	2162	52,5
11 Anneau : seul	6180	35,8
12 Anneau : géométrie des dents	15745	246,0
13 Anneau : géométrie des dents	2588	43,1
14 CMC : noy. T1	4373	3,9
15 CMC : noy. T2	3285	27,8
16 CMC : noy. T3	3285	27,8
17 CMC : noy. T4	3096	32,0
18 CMC : noy. T5	3285	27,8
19 CMC : noy. T6	4649	2,2
20 CMC : noy. T7	3285	27,8
21 CMC : noy. T8	3285	27,8
22 CMC : noy. T9	3285	27,8
23 CMC : noy. T10	3360	26,2
24 CMC : noy. T11	3286	27,8
25 CMC : noy. T12	0	100,0
26 CMC : noy. T13	3266	28,2
27 CMC : noy. T14	4895	7,6
28 CMC : noy. T15	68129	1397,3
29 CMC : noy. + carc. T1	4433	2,6
30 CMC : noy. + carc. T2	3968	12,8
31 CMC : noy. + carc. T3	3940	13,4
32 CMC : noy. + carc. T4	3861	15,1
33 CMC : noy. + carc. T5	3951	13,2
34 CMC : noy. + carc. T6	4498	1,1
35 CMC : noy. + carc. T7	3946	13,3
36 CMC : noy. + carc. T8	3955	13,1
37 CMC : noy. + carc. T9	3953	13,1
38 CMC : noy. + carc. T10	3967	12,8
39 CMC : noy. + carc. T11	3979	12,5
40 CMC : noy. + carc. T12	3058	32,8
41 CMC : noy. + carc. T13	3920	13,8
42 CMC : noy. + carc. T14	4857	6,7
43 CMC : noy. + carc. T15	45008	889,2
44 CMC : noy. + carc. + dents T1	6975	53,3
45 CMC : noy. + carc. + dents T2	5674	24,7
46 CMC : noy. + carc. + dents T3	5654	24,3
47 CMC : noy. + carc. + dents T4	5432	19,4
48 CMC : noy. + carc. + dents T5	5661	24,4
49 CMC : noy. + carc. + dents T6	7296	60,4
50 CMC : noy. + carc. + dents T7	5658	24,4
51 CMC : noy. + carc. + dents T8	5664	24,5
52 CMC : noy. + carc. + dents T9	5663	24,5
53 CMC : noy. + carc. + dents T10	5834	28,2
54 CMC : noy. + carc. + dents T11	5684	24,9
55 CMC : noy. + carc. + dents T12	3058	32,8
56 CMC : noy. + carc. + dents T13	5603	23,1
57 CMC : noy. + carc. + dents T14	7750	70,3
58 CMC : noy. + carc. + dents T15	48034	955,7
59 CMC : noy. + dents T1	6719	47,7
60 CMC : noy. + dents T2	5057	11,1
61 CMC : noy. + dents T3	5057	11,1
62 CMC : noy. + dents T4	4765	4,7
63 CMC : noy. + dents T5	5057	11,1
64 CMC : noy. + dents T6	7162	57,4
65 CMC : noy. + dents T7	5057	11,1
66 CMC : noy. + dents T8	5057	11,1
67 CMC : noy. + dents T9	5057	11,1
68 CMC : noy. + dents T10	5299	16,5
69 CMC : noy. + dents T11	5061	11,2
70 CMC : noy. + dents T12	0	100,0
71 CMC : noy. + dents T13	5000	9,9
72 CMC : noy. + dents T14	7532	65,5
73 CMC : noy. + dents T15	52699	1058,2

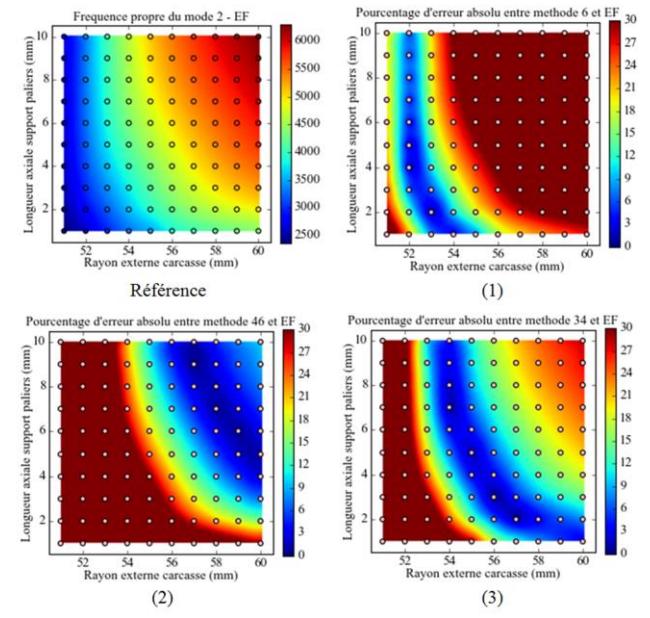


Figure 3. Etude paramétrique de la carcasse.

3.3. Etude paramétrique sur le noyau statorique

Les rayons interne et externe du noyau statorique sont variés, ce qui revient à modifier le rayon moyen et l'épaisseur. Par rapport à la section précédente, les catégories sont plus nombreuses ou moins visibles. Les résultats de la figure 4 ne montrent que les catégories complémentaires. La première catégorie concerne les modèles permettant de modéliser des machines ayant des rayons externe et interne élevés (et aussi une carcasse à ne pas oublier). C'est le cas des méthodes 40 et 55. La deuxième catégorie de méthodes est portée sur les rayons externe et interne faibles. C'est le cas des méthodes 44-54, 56, 59 et 64. La troisième catégorie est à cheval entre les deux premières et concerne les méthodes 29-39, 41, 42, 60-63, 65-69 et 71. Au-delà de celles-ci, se trouvent les méthodes 1-5, 9, 10 et 13 qui ne permettent de modéliser que des machines ayant un rayon externe important. Les méthodes 6-8, 11, 12, 14-24, 26 et 27 permettent de modéliser des machines ayant des épaisseurs moyennes.

La réunion des trois catégories de la figure 4 permet d'étudier l'ensemble des paramètres du noyau statorique. Pour un noyau fin mais à diamètre moyen élevé, la théorie des coques minces cylindriques T12 pour un noyau avec carcasse ou noyau avec carcasse et dents est la plus adaptée. Pour un noyau fin mais à faible diamètre moyen, les théories des coques minces cylindres modélisant un noyau avec une carcasse et des dents sont efficaces. Enfin, entre les deux, les théories des coques minces cylindres prenant en compte un noyau avec une carcasse ou un noyau avec des dents sont les plus adaptées.

3.4. Etude paramétrique sur les dents statoriques

L'épaisseur des dents est variée de 3 à 15 mm tandis que la hauteur est modifiée de 15 à 25 mm. Ces cas extrêmes donnent des résultats étonnant comme en atteste la figure 5. Pour une machine à dents très courtes et fines, les fréquences propres du mode 2 sont particulièrement élevées. Cela est dû au balancement des dents (teeth-rocking) qui s'exprime à partir d'une certaine limite. Néanmoins, ce balancement est observé par éléments finis mais les méthodes analytiques ne le prennent pas en compte. Ainsi, toutes les méthodes présentées sont incapables de modéliser des dents courtes et fines.

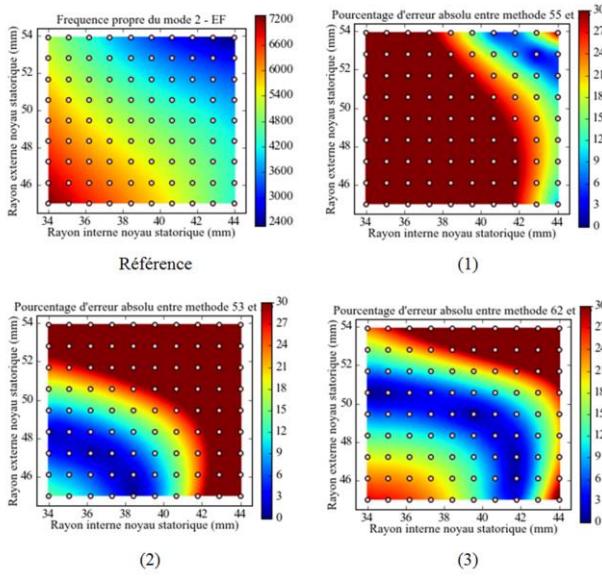


Figure 4. Etude paramétrique du noyau statorique.

La première catégorie de méthode présentée sur la figure 5 permet de modéliser uniquement des machines possédant des dents fines et longues. Toutefois, des dents trop fines ne peuvent pas être prises en compte correctement. C'est le cas des méthodes 1-6, 9, 10, 13, 15-18, 20-24, 26, 40 et 55. La deuxième catégorie de modèles permet de calculer toutes les autres configurations. C'est le cas des méthodes 14, 19, 27, 29-39, 41 et 42. Enfin, certaines méthodes comme 45-48, 50-54, 56, 60-63, 65-69 et 71 ne permettent de modéliser que les machines ayant des dents plutôt longues et moyennement à largement épaisses.

Pour caractériser l'effet des dents, la décomposition en coques minces cylindriques qui considère le noyau avec la carcasse suffit. Pour des dents encore plus fines, le noyau seul, par les coques minces cylindriques, est suffisant.

4. CONCLUSION

Cet article s'est intéressé à l'étude de la précision des méthodes analytiques pour le calcul des fréquences propres du mode circonférentiel d'ordre 2. Trois couples de paramètres qui concernent la carcasse, le noyau statorique et les dents statoriques ont permis de mettre en évidence qu'il existe des zones où les modèles analytiques donnent des résultats pertinents, au-delà de leur domaine de validité (épaisseur fine justifiant des efforts constants sur l'épaisseur de la coque). Un modèle analytique généralisé qui serait une combinaison des modèles présentés permettrait de s'assurer d'une meilleure précision sur un large éventail de machines.

5. REFERENCES

- [1] G. Verez and C. Espanet, "Natural frequencies analytical modeling of small industrial radial flux permanent magnet motors," presented at the 18th Int. Conf. on Elec. Mach. and Syst., Pattaya, 2015.
- [2] R. Hoppe, "Vibrationen eines ringes in seiner ebene," *J. Für Reine Angew. Math.*, vol. 73, pp. 158–170, 1871.
- [3] H. Jordan, *Geräuscharme elektromotoren: lärmbildung und lärmbeeinflussung bei elektromotoren*, Girardet. 1950.
- [4] S. J. Yang, *Low-noise electrical motors*. Oxford; New York: Clarendon Press ; Oxford University Press, 1981.
- [5] P. L. Timar, A. Fazekas, J. Kiss, A. Miklos, and S. J. Yang, *Noise and vibration of electrical machines*. Amsterdam: Elsevier, 1989.
- [6] S. Huang, M. Aydin, and T. A. Lipo, "Electromagnetic vibration and noise assessment for surface mounted PM machines," presented at the Pow. Eng. Society Summer Meeting, 2001, vol. 3, pp. 1417–1426.
- [7] J. F. Gieras, J. C. Lai, and C. Wang, *Noise of polyphase electric motors*. Boca Raton, FL: CRC/Taylor & Francis, 2006.
- [8] A. W. Leissa, *Vibration of shells*, vol. SP-288. NASA, 1973.
- [9] A. E. H. Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1906.
- [10] F. W. Carter, "Magnetic noise in dynamo-electric machines," *Engineering*, vol. 134, 1932.
- [11] A. J. Ellison and S. J. Yang, "Natural frequencies of stators of small electric machines," *Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 118, no. 1, p. 185, 1971.
- [12] M. Hecquet, "Contribution à l'instrumentation de la démarche de conception des machines électriques," 2006.
- [13] J. Le Besnerais, V. Lanfranchi, M. Hecquet, P. Brochet, and G. Friedrich, "Prediction of Audible Magnetic Noise Radiated by Adjustable-Speed Drive Induction Machines," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 46, no. 4, pp. 1367–1373, Jul. 2010.
- [14] R. Islam and I. Husain, "Analytical model for predicting noise and vibration in permanent-magnet synchronous motors," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 46, no. 6, pp. 2346–2354, Nov. 2010.
- [15] N. Bracikowski, M. Hecquet, P. Brochet, and S. V. Shirinskii, "Multiphysics modeling of a permanent magnet synchronous machine by using lumped models," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 59, no. 6, pp. 2426–2437, Jun. 2012.
- [16] E. Erdelyi, "Predetermination of sound pressure levels of magnetic noise of polyphase induction motors," *Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Part III Power Appar. Syst.*, vol. 74, no. 3, Jan. 1955.
- [17] M. Endo and O. Taniguchi, "Flexural vibrations of a ring," *Bull. JSME*, vol. 14, no. 74, pp. 761–771, 1971.
- [18] J. Kirkhope, "Simple frequency expression for the in-plane vibration of thick circular rings," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 59, no. 1, p. 86, 1976.

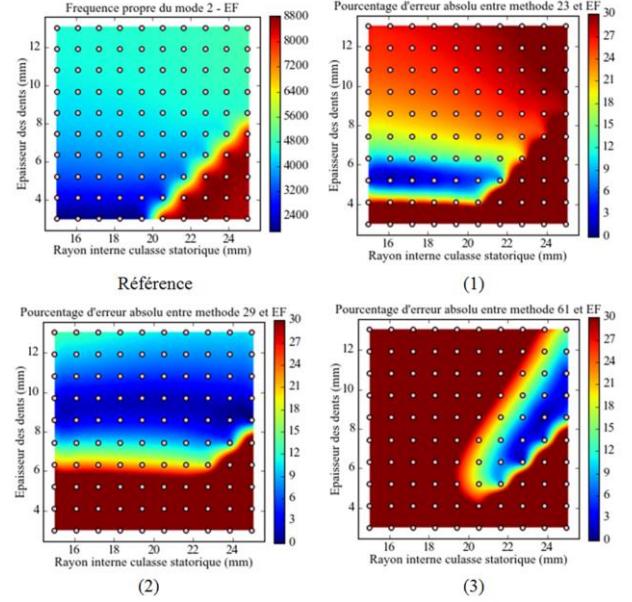


Figure 5. Etude paramétrique des dents statoriques.

- [19] R. K. Singal, K. Williams, and H. Wang, "Effect of radial thickness on the in-plane free vibrations of circular annular discs," *J. Vib. Acoust.*, vol. 113, no. 4, p. 455, 1991.
- [20] J. L. Sanders, "Nonlinear theories for thin shells." Technical report no. 10 of the United States Office of Naval Research, 1961.
- [21] H. R. Hamidzadeh and R. N. Jazar, *Vibrations of thick cylindrical structures*. 2010.
- [22] A. E. H. Love, "The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell," *Philos. Trans. R. Soc. Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 179, no. 0, pp. 491–546, Jan. 1888.
- [23] W. Soedel, *Vibrations of shells and plates*. New York: Dekker, 2004.
- [24] R. K. Singal and K. Williams, "A theoretical and experimental study of vibrations of thick circular cylindrical shells and rings," *J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, vol. 110, no. 4, p. 533, 1988.
- [25] H. Wang and K. Williams, "Vibrational modes of thick cylinders of finite length," *J. Sound Vib.*, vol. 191, no. 5, pp. 955–971, Apr. 1996.
- [26] K. Forsberg, "Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells," *AIAA J.*, vol. 2, no. 12, pp. 2150–2157, Dec. 1964.
- [27] G. B. Warburton, "Vibration of thin cylindrical shells," *J. Mech. Eng. Sci.*, vol. 7, no. 4, pp. 399–407, Dec. 1965.
- [28] J. F. Gieras, C. Wang, C. S. L. Joseph, and N. Ertugrul, "Analytical prediction of noise of magnetic origin produced by permanent magnet brushless motors," presented at the IEMDC, 2007, pp. 148–152.
- [29] D. C. Gazis, "Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, no. 5, p. 568, 1959.
- [30] H. D. McNiven, "Axially symmetric waves in hollow, elastic rods: Part I," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 40, no. 4, p. 784, 1966.
- [31] G. M. L. Gladwell and D. K. Vijay, "Natural frequencies of free finite-length circular cylinders," *J. Sound Vib.*, vol. 42, no. 3, pp. 387–397, Oct. 1975.
- [32] J. R. Hutchinson and S. A. El-Azhari, "Vibrations of free hollow circular cylinders," *J. Appl. Mech.*, vol. 53, no. 3, p. 641, 1986.
- [33] G. R. Buchanan and C. B. Y. Yii, "Effect of symmetrical boundary conditions on the vibration of thick hollow cylinders," *Appl. Acoust.*, vol. 63, no. 5, pp. 547–566, May 2002.
- [34] R. Girgis and S. Verma, "Method for accurate determination of resonant frequencies and vibration behaviour of stators of electrical machines," *Electr. Power Appl. IEE Proc. B*, vol. 128, no. 1, 1981.
- [35] S. P. Verma, R. K. Singal, and K. Williams, "Vibration behaviour of stators of electrical machines, part I: Theoretical study," *J. Sound Vib.*, vol. 115, no. 1, pp. 1–12, May 1987.
- [36] R. K. Singal, K. Williams, and S. P. Verma, "Vibration behaviour of stators of electrical machines, part II: Experimental study," *J. Sound Vib.*, vol. 115, no. 1, pp. 13–23, May 1987.
- [37] J. So and A. W. Leissa, "Free vibrations of thick hollow circular cylinders from three-dimensional analysis," *J. Vib. Acoust.*, vol. 119, no. 1, p. 89, 1997.
- [38] J. N. Reddy, "A simple higher-order theory for laminated composite plates," *J. Appl. Mech.*, vol. 51, no. 4, p. 745, 1984.
- [39] K. Y. Lam and W. Qian, "Free vibration of symmetric angle-ply thick laminated composite cylindrical shells," *Compos. Part B Eng.*, vol. 31, no. 4, pp. 345–354, Jun. 2000.
- [40] B. M. Wilamowski and J. D. Irwin, *Power electronics and motor drives*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2011.
- [41] P. Vijayraghavan and R. Krishnan, "Noise in electric machines: a review," in *Industry Applications Conference, 1998. Thirty-Third IAS Annual Meeting. The 1998 IEEE*, 1998, vol. 1, pp. 251–258 vol.1.
- [42] C. Laudensack, T. Dentler, Q. Yu, and D. Gerling, "Calculation and measurement of eigenmodes for a canned switched reluctance machine," presented at the ICEMS, 2012.
- [43] G. Verez, "Contribution à l'étude des émissions vibro-acoustiques des machines électriques. Cas des machines synchrones à aimants dans un contexte automobile.," 2014.
- [44] R. S. Colby, F. M. Mottier, and T. J. E. Miller, "Vibration modes and acoustic noise in a four-phase switched reluctance motor," *Ind. Appl. IEEE Trans. On*, vol. 32, no. 6, pp. 1357–1364, Nov. 1996.
- [45] W. Cai, P. Pillay, and A. Onekanda, "Analytical formulae for calculating SRM modal frequencies for reduced vibration and acoustic noise design," in *Electric Machines and Drives Conference, 2001. IEMDC 2001. IEEE International*, 2001, pp. 203–207.
- [46] P. L. Alger, *The nature of polyphase induction machines*. Wiley, 1951.
- [47] S. P. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*. New York: D. Van Nostrand Company, 1937.
- [48] J.-P. Lecointe, R. Romary, J.-F. Brudny, and T. Czapla, "Five methods of stator natural frequency determination: case of induction and switched reluctance machines," *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 18, no. 5, pp. 1133 – 1159, 2004.
- [49] C. Couturier, J. P. Lecointe, and B. Cassoret, "Modelling considerations for electrical motor stators," presented at the Sixth International Seminar of Applied Mechanics, Gliwice, Poland, 2002, pp. 17–23.
- [50] P. Witczak, "Analytical method for calculation of eigenfrequencies and modes of stator cores in AC machines," *Masz. Elektr. Zesz. Probl.*, vol. Nr 4(92), pp. 1–6, 2011.
- [51] J. Boisson, F. Louf, J. Ojeda, X. Mininger, and M. Gabsi, "Analytical approach for mechanical resonance frequencies of high-speed machines," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 61, no. 6, pp. 3081–3088, Jun. 2014.
- [52] C. Wang and J. C. S. Lai, "Prediction of natural frequencies of finite length circular cylindrical shells," *Appl. Acoust.*, vol. 59, no. 4, pp. 385–400, Apr. 2000.
- [53] Code_Aster, <http://web-code-aster.org/>. 2015.
- [54] Salome Platform, <http://www.salome-platform.org/>. 2015.
- [55] G. Verez, G. Barakat, Y. Amara, and G. Hoblos, "Impact of Pole and Slot Combination on Vibrations and Noise of Electromagnetic Origins in Permanent Magnet Synchronous Motors," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, Mar. 2015.