Méthode de collocation multidimensionnelle creuse adaptative pour le développement d'un métamodèle

Thu Trang NGUYEN[1], Stéphane CLÉNET[2]
[1]L2EP, Université Lille 1, thu-trang.nguyen@univ-lille1.fr
[2]L2EP, ENSAM, stephane.clenet@ensam.eu

RESUME – Dans cette communication, nous proposons le développement d'un metamodèle d'un modèle numérique en utilisant une méthode de collocation creuse adaptative qui permet de traiter des problèmes avec un grand nombre de paramètres. Cette méthode est appliquée au cas d'une ventouse électromagnétique modélisée en 2D par la méthode des éléments finis dont les paramètres dimensionnels sont variables.

Mots-clés – Méthode de collocation, Approximation creuse, Quantification d'incertitudes, Méthode non intrusive

1. INTRODUCTION

Les méthodes de conception ou de quantification d'incertitudes font souvent appel à l'utilisation de modèles paramétrés *et al* [1]. Si ces modèles sont analytiques, le temps de calcul faible de ces derniers permet souvent d'explorer l'espace des paramètres sans limitation particulière. Par contre, si le modèle est numérique, basé par exemple sur la méthode des éléments finis, le temps de résolution proscrit toute exploration de tout l'espace en particulier si le nombre de paramètres est élevé. Il est alors nécessaire d'avoir recours à un métamodèle basé souvent sur une approximation polynomiale. Il s'avère que le nombre de polynômes de la base croit de manière exponentielle avec le nombre de paramètres d'entrée. On appelle cela la malédiction de la dimension. Dans le cas de l'identification d'un metamodèle à partir d'une base complète, le nombre de points issus du modèle complet est au moins égal au nombre de polynômes. Le nombre de résolutions du modèle complet croit alors aussi de manière exponentielle. Pour faire face à cette malédiction de la dimension, des méthodes d'approximation utilisant des bases creuses ont été proposées. Il s'agit alors de construire une approximation en sélectionnant les polynômes de la base qui permettent de représenter au mieux la grandeur d'intérêt. Des techniques basées sur des méthodes de régression comme la Least Angle Regression (LARS) ont été proposées dans la littérature et appliquées avec succès pour traiter des problèmes en mécanique et en génie électrique *et al* [2]*et al* [3]*et al* [5]*et al* [6]. Dans cette communication, nous proposons d'appliquer une méthode de collocation adaptative pour construire un métamodèle basé sur une méthode proposé dans *et al* [5]. Cette méthode est appliquée à la construction d'un métamodèle d'une ventouse électromagnétique modélisée par éléments finis dont les dimensions ont été paramétrées.

2. MÉTHODE DE COLLOCATION CREUSE

2.1. Collocation classique

On considère tout d'abord un modèle avec 1 paramètre d'entrée ξ et une sortie s qui représente la grandeur d'intérêt de sortie du modèle. Si on note ξ^j un ensemble de m points pour lesquels le modèle a été résolu et dont les m valeurs sont notées s^j. En appliquant une méthode de collocation, on obtient une approximation $\hat{s}$ de s sous la forme :

$$s \approx \hat{s} = \sum_{i=1}^{P} s^j \mathcal{L}_i(\xi) \tag{1}$$

Les pôlynomes $\mathcal{L}_i$ sont les pôlynomes de Lagrange donnés par :

$$\mathcal{L}(\xi) = \prod_{j=1;j\neq i}^{m} \frac{\xi - \xi^j}{\xi^i - \xi^j} \tag{2}$$

Dans le cas où le nombre de paramètres du modèle est égal à M, on note ξ_i le ième paramètre. On considère m_i valeurs $\xi_i^1, ..., \xi_i^{m_i}$ du paramètre ξ_i. On définit alors le M-uplet $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, ..., \xi_M)$. Une manière naturelle de construire une approximation par collocation est de construire des M-uplets $\boldsymbol{\xi}_{i_1,i_2,...,i_N} = (\xi_1^{i_1}, \xi_2^{i_2}, ..., \xi_M^{i_M})$ avec $i_j \in (1, m_j), j \in (1, M)$. On résout alors pour chaque M-uplet le modèle pour obtenir une valeur $s_{i_1 i_2 \ldots i_M}$. On peut obtenir alors un métamodèle par une méthode de collocation dans le cas multidimentionnel de la forme :

$$\hat{s} = \sum_{i_1=1}^{m_1} \ldots \sum_{i_M=1}^{m_N} s_{i_1 i_2 \ldots i_M} \mathcal{L}_{i^1}(\xi_1) \ldots \mathcal{L}_{i^N}(\xi_N) \tag{3}$$

On constate que le nombre de résolutions du modèle est égal à $m = m_1 ... m_M$ et croit de manière exponentielle avec le nombre de paramètre d'entrée ainsi que le nombre de polynômes mis en jeu. Dans le cas $N = 11$, si on choisit une collocation polynomiale du deuxième ordre selon chaque dimension $m_i = 3, i \in (1, \ldots, M)$, on obtient alors un nombre de résolutions du modèle de l'ordre de $m = 177147$ ce qui est infaisable dans de nombreux cas. De plus,le nombre de polynômes m du métamodèle étant très élevé, le temps de calcul associé le sera aussi.

2.2. Notion d'admissibilité

Afin de construire une base creuse, on utilise la notion d'admissibilité. On définit l'ensemble de M-uplet $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M}^M \setminus \{0, \ldots, 0\}\}$ admissible si et seulement si : $\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{A}, \boldsymbol{\xi} - \mathbf{e}_j \in \mathcal{A}$, $\forall j : 1 \leq j \leq M$, $\mathbf{e}_j$ est un vecteur de taille M vérifiant : $\forall i : 1 \leq i \leq M : \mathbf{e}_j(i) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$

2.3. Collocation creuse

Chkifa and al. *et al* [5] ont proposé une procédure adaptative de construction d'un métamodèle basée sur une méthode de collocation. On cherche une solution sous la forme :

$$\hat{s}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{A}} \delta s_{\boldsymbol{\alpha}} \mathcal{L}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) \tag{4}$$

avec $\mathcal{A}$ l'ensemble admissible des M-uplets $\boldsymbol{\alpha}$, $\mathcal{L}_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi})$ le polynôme multidimensionnel correspondant au M-uplet $\boldsymbol{\alpha}$ introduit dans l'équation (3) et $\delta s_{\boldsymbol{\alpha}}$ un coefficient réel. L'ensemble est construit de manière itérative. Initialement, $\mathcal{A}$ est formé du M-uplet $(0, ..., 0)$. On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble de n M-uplets, $\boldsymbol{\alpha}_n$ le dernier M-plet construit et $\hat{s}_n(\boldsymbol{\xi})$ à l'étape n. On construit les M M-uplets $\boldsymbol{\alpha}_n^i = (\alpha_1, ..., \alpha_i + 1, ..., \alpha_M)$. On résout alors le modèle pour les M valeurs de paramètre $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\alpha}_n^i}$ et on note $s_n^i == s(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\alpha}_n^i})$ les valeurs obtenues et $\delta s_{\boldsymbol{\alpha}_n^i} = s_n^i - \hat{s}_n(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\alpha}_n^i}$. On choisit alors parmi les M-uplets α_n^i (et ceux calculés aux précédentes itérations) et qui sont admissibles celui qui possède le terme $\delta s_{\boldsymbol{\alpha}_n^i}$ le plus élevé en valeur absolue. On ajoute alors le M-uplet $\boldsymbol{\alpha}_n^i$ à $\mathcal{A}_n$ pour obtenir le nouvel ensemble $\mathcal{A}_{n+1}$ et le coefficient $\delta s_{\boldsymbol{\alpha}_{n+1}}$ est égal à $\delta s_{\boldsymbol{\alpha}_n^i}$.

A titre d'exemple on donne sur la figure 1 un exemple d'une suite d'iération dans le cas à deux dimensions de la construction d'un ensemble admissible de M-uplets. A chaque itération, les points rouges représentent les M-uplets sélectionnés et les points noirs ceux qui sont en cours de traitement.

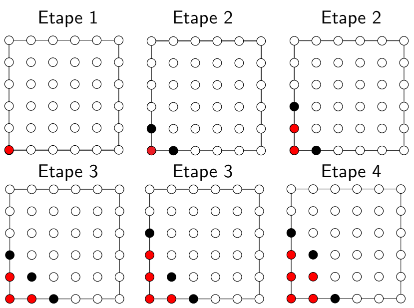

Fig. 1. Construction de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ vérifiant le condition d'admissibilité dans un cas à deux dimensions

.

3. DISPOSITIF ÉTUDIÉ

On considère comme exemple d'application un modèle 2D éléments finis d'une ventouse électromagnétique. La géométrie du dispositif est définie par 11 paramètres que l'on va considérer comme variables. La figure 2 présente le dispositif étudié. Nous nous intéressons à la force exercée sur la partie mobile lorsque la bobine n'est pas alimentée. Cette force est calculée par le tenseur de Maxwell. On considère que les paramètres varient de +/-20 et on cherche à développer un métamodèle donnant la force sur cette plage de paramètres. Nous avons mis en oeuvre la méthode itérative proposée pour construire un métamodèle. Nous avons utilisé la série de points de Leja pour construire les points de collocation $\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\alpha}_n^i}$. Pour évaluer la précision du métamodèle en fonction du nombre de résolution du modèle choisi, un nombre de N=1000 valeurs de paramètres a été généré aléatoirement. On définit alors l'erreur :

$$\epsilon = \frac{1}{\mathbb{E}(s)} \sum_{i=1}^{N} \frac{(s_i - \hat{s}_i)^2}{N} \tag{5}$$

où $\mathbb{E}$ est la fonction d'espérence, s_i et $\hat{s}_i$ les valeurs du modèle et de l'approximation pour la ieme réalisation. Sur la figure 3, on a reporté l'évolution de l'erreur du métamodèle en fonction du nombre de résolutions du modèle. On constate bien que l'erreur diminue de manière progressive et qu'après 50 points on obtient une erreur tout à fait acceptable. On obtient des résultats similaires à ceux que l'on a obtenus précédemment avec la méthode LAR [6]. La méthode proposée ici semble offrir des perspectives intéressantes pour la construction de métamodèle en vue d'une application pour la conception ou la quantification d'incertitudes.

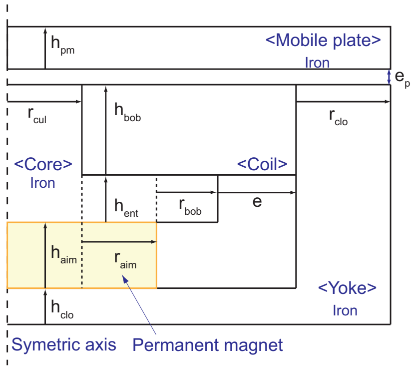

Fig. 2. Dispositif magnétique

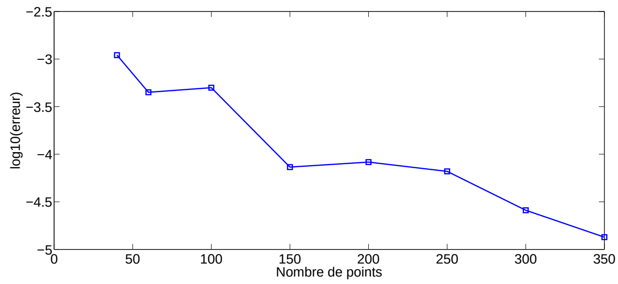

Fig. 3. Evolution de l'erreur en fonction du nombre de résolutions du modèle

4. RÉFÉRENCES

[1] O. P. Le Maitre, O. M. Knio, « Spectral Methods for Uncertainty Quantification», Springer, USA, 2010

[2] B. Efron, T. Hastie, I. Johnstone, R. Tibshirani, « Least Angle Regression », The Annals of Statistics, vol.32, pp. 407-499 (2004).

[3] G. Blatman, B. Sudret, «Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression», J. Comput. Phys., Vol. 230, pp. 2345-2367, 2011.

[4] F. Nobile, R. Tempone, C. Webster, «An anisotropic sparse grid stochastic collocation method for PDEs with random input data», SIAM J. Numer. Anal., 46(5) :2411–2442, 2008.

[5] A. Chkifa, A. Cohen, C. Schwab, «High-dimensional adaptive sparse polynomial interpolation and applications to parametric PDEs», Foundations of Computational Mathematics, 14(4) : 601-633, 2014.

[6] T. T. Nguyen, D. H. Mac, S. Clénet, «Sensitivity study of a Magnetic Device», UMEMA 2015.