

Comparaison des méthodes de réduction d'ordre POD et Krylov, application à la méthode PEEC

Mateus Antunes Oliveira Leite ^{†,‡}, Benoit Delinchant [†], Jean-Michel Guichon [†], Joao Vasconcellos [‡]

[†]G2ELab - Laboratoire de Génie Electrique de Grenoble, Université Grenoble Alpes.

[‡]Laboratoire de Computation Évolutionnaire, Université Fédérale du Minas Gerais.

RESUME – De nos jours, les logiciels de simulation physique ont la capacité de produire des modèles très précis, mais en contrepartie, ils sont très coûteux en temps de calcul et en mémoire. Ce travail présente la comparaison de deux méthodes de réduction d'ordre : la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et la méthode de correspondance des moments (*Moment Matching / Krylov*). Une façon automatique de choisir les points d'expansion est proposée. La mesure d'impédance d'une antenne est utilisée comme exemple d'application. Les avantages et désavantages de chaque méthode sont présentés et discutés.

Mots-clés – Réduction de Modèles, Proper Orthogonal Decomposition, Moment Matching.

1. INTRODUCTION

De nos jours, les concepteurs exploitent de plus en plus d'outils d'analyse tels que la simulation dynamique des systèmes, l'analyse paramétrique, ou encore l'optimisation. Les logiciels utilisés pour simuler les équipements électromagnétiques produisent des modèles de plus en plus précis. Ainsi, en dépit d'une constante augmentation des capacités de calculs des outils informatiques, il en résulte la nécessité de réduire les temps de simulation de ces modèles.

Il existe alors des méthodes de réduction d'ordre qui peuvent être utilisées pour trouver un modèle beaucoup plus petit, mais qui possède presque le même comportement entrée/sortie que le système original [1]. Il y a des méthodes bien établies pour ce but, comme *Balanced Truncation* [11], Décomposition orthogonale aux valeurs propres [4], *Dynamic Mode Decomposition* [16] et sous-espace de Krylov [6]. Le choix de la méthode est un problème délicat. Il faut prendre en compte les différents caractéristiques du système original comme ses propriétés physiques et mathématiques [15].

L'analyse que nous faisons ici, vise une comparaison entre la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres (temporelle et fréquentielle) et la méthode de correspondance de moments pour la réduction de circuits électriques obtenus par la méthode PEEC [8].

L'article est divisé en cinq parties principales. La Section 2 contient l'introduction au cadre mathématique utilisé pour la plupart des méthodes de réduction de modèles. La Section 3 présente les différentes techniques qui seront comparées dans cet article. Ensuite, l'équivalence entre les méthodes pour un cas spécifique est présentée dans la Section 4. Une méthode pour le placement automatique des points d'expansion est introduit dans la Section 5. La Section 6 montre l'application des concepts développés. L'article fini par les conclusions dans la Section 7.

2. CADRE MATHÉMATIQUE

Dans cet article, nous ne traitons que des systèmes linéaires et invariants, qui s'écrivent donc de la façon générale suivante (1). Dans cette équation on a : E et $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times e}$ et $C \in \mathbb{R}^{s \times n}$. Normalement, n est très grand.

$$\begin{cases} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1)$$

Parmi les méthodes pour effectuer la réduction d'ordre d'un système, une catégorie très répandue s'appuie sur la projection du modèle dans un sous-espace de taille plus petite. Le projecteur dans le sous-espace vectoriel engendré par $V \in \mathbb{C}^{n \times q}$ orthogonal à celui de $W \in \mathbb{C}^{n \times q}$ est représenté par (2). Les matrices sont complexes pour préserver la généralité et donc l'opérateur transposition (T) a été substitué par l'opérateur transposition et conjugaison (*). La façon de choisir les sous-espaces V et W est ce que différencie chaque méthode [13].

$$\Pi = V(W^*V)^{-1}W^* \quad (2)$$

Le vecteur d'état du système complet est approximé par une combinaison linéaire des colonnes de la matrice V dont le vecteur $x_r \in \mathbb{C}^q$ contient les coefficients de cette combinaison. Cela est écrit en (3).

$$x \approx Vx_r \quad (3)$$

Si on applique (2) et (3) au système décrit par (1), on obtient un système réduit comme en (4).

$$\begin{cases} W^*EV\dot{x}_r &= W^*AVx_r + W^*Bu \\ y_r &= CVx_r \end{cases} \quad (4)$$

Il est très courant de choisir W comme étant égal à V . Cela est spécialement vrai quand on travaille avec des circuits électriques grâce à des propriétés préservées comme stabilité et passivité [5].

Le but de ce travail est de faire une comparaison entre deux méthodes très répandues : la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) et la méthode de Krylov (Correspondance de moments). La démarche présentée est générique mais nous l'appliquons à la réduction de modèles obtenus par la méthode des circuits équivalents à constantes localisées (PEEC) [7].

3. DESCRIPTION DES MÉTHODES

Il y a deux façons différentes de faire la représentation d'un système : temporel et fréquentiel. Chacune ayant ses avantages et inconvénients. En ayant cela en tête, on présente deux méthodes différentes pour la réduction d'ordre, chacune basée sur un des domaines.

3.1. Méthode de Correspondance des Moments

Pour qu'une analyse fréquentielle d'un système soit possible, on peut appliquer la transformation de Laplace au système d'état (1) pour obtenir sa fonction de transfert, comme en (5). Dans le cas d'une seule entrée et une seule sortie la fonction $G(s)$, il s'agit d'un scalaire. Si cela n'est pas le cas, il s'agit d'une matrice.

$$G(s) = C(Es - A)^{-1}B \quad (5)$$

On peut modifier (5) comme en (6) pour des raisons que nous exposerons plus loin. Dans cette équation le scalaire $s_0 \in \mathbb{C}$ est nommé point d'expansion.

$$\begin{aligned} G(s) &= C(Es - Es_0 + Es_0 - A)^{-1}B \\ G(s) &= C(E(s - s_0) - (A - s_0E))^{-1}B \end{aligned} \quad (6)$$

Pour simplifier, désormais la définition en (7) sera utilisée.

$$A(s_0) = A - s_0E \quad (7)$$

On continue à modifier (6) en (8).

$$\begin{aligned} G(s) &= -C(A(s_0) - E(s - s_0))^{-1}B \\ G(s) &= -C(\mathcal{I} - A(s_0)^{-1}E(s - s_0))^{-1}A(s_0)^{-1}B \end{aligned} \quad (8)$$

Il est possible d'extraire plus d'information de (8) en regardant son développement en série de puissances. Cela peut être fait avec l'aide de (9), valide pour des matrices avec valeurs propres dont les magnitudes sont plus petites que 1.

$$(\mathcal{I} - M)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} M^i \quad (9)$$

En substituant (9) dans (8), on obtient (10).

$$G(s) = -\sum_{i=0}^{\infty} C(A(s_0)^{-1}E)^i A(s_0)^{-1}B(s - s_0)^i \quad (10)$$

Les moments d'une fonction de transfert autour de s_0 sont définis comme l'opposé des coefficients de (10). Cela peut être vu dans (11).

$$M_i = C(A(s_0)^{-1}E)^i A(s_0)^{-1}B \quad (11)$$

La méthode de Krylov [6] travaille directement avec la représentation fréquentielle du système. Le choix de la matrice V est fait de façon à ce que quelques moments de la fonction de transfert du système réduit soient égaux à ceux du modèle complet.

La première étape est de choisir le placement des points d'expansion. Ensuite, il faut déterminer l'ordre du moment appliqué à chaque point d'expansion. Ces choix sont assez sensibles et un mauvais choix peut dégrader fortement la précision du modèle réduit [14].

La matrice V du projecteur (2) est ensuite calculée par la méthode d'Arnoldi [2] pour que son sous-espace vectoriel engendré soit égal au sous-espace de Krylov de taille t en (12). Cela garantit qu'il y aura la correspondance des moments sans effectivement calculer la valeur des moments. S'il y a plusieurs points d'expansion, le résultat est le sous-espace engendré par la combinaison de tous les sous-espaces individuels.

$$V = \mathcal{K} \{A(s_0)^{-1}E, A(s_0)^{-1}B, t\} \quad (12)$$

Cette méthode a l'avantage de ne pas avoir besoin d'effectuer la simulation temporelle du système complet. Par contre, il est très difficile d'adapter cette méthode pour les systèmes non linéaires, et l'implémentation peut être délicate pour les systèmes avec plusieurs entrées et sorties.

3.2. Décomposition orthogonale aux valeurs propres

La méthode POD [4] utilise les données obtenues pour une simulation temporelle du système complet pour déterminer de façon empirique le sous-espace permettant de représenter au mieux la dynamique du modèle.

Il faut dans un premier temps caractériser la simulation dynamique générant les données nécessaires à la réduction : une fonction d'excitation appropriée et la durée de la simulation.

L'implémentation de cette méthode est très simple et peut être appliquée à des systèmes non linéaires. Par contre, la simulation du modèle complet est très coûteuse et parfois même prohibitive.

3.2.1. POD Temporelle

Après avoir fait une simulation du système complète, c'est naturel d'enregistrer ces données dans une matrice $S \in \mathbb{R}^{n \times q}$. Chaque colonne de cette matrice est un vecteur d'état pour un instant de temps défini pour le pas de temps utilisé par l'algorithme de solution des équations différentielles ou pour un schéma d'échantillonnage [3]. Pour construire la base de projection, on cherche le vecteur qui représente le mieux la dynamique contenue dans la matrice S . Cette dernière phrase peut être traduite mathématiquement par trouver le vecteur dont les produits scalaires avec les colonnes de S soient les plus grands possibles en moyenne. Ces produits sont écrits en (13). Les résultats sont collectés comme un vecteur v .

$$S^*v = x \quad (13)$$

Pour résoudre ce problème d'optimisation, il faut imposer une condition sur la norme du vecteur v . Si cela n'est pas fait, il est possible de produire des résultats arbitrairement grands en augmentant la norme du vecteur. Le Lagrangien de ce problème en prenant en compte cette restriction est écrit en (14).

$$\mathcal{L} = x^*x - \lambda(1 - v^*v) \quad (14)$$

Faisant la substitution de (13) en (14) et prenant le gradient du Lagrangien par rapport au vecteur v , la condition d'optimalité qui en résulte est (15).

$$SS^*v = \lambda v \quad (15)$$

Il est facile d'identifier cette condition comme un problème de valeurs propres dont l'ensemble des solutions forme la matrice V . Toutefois, la matrice SS^* , appelée matrice de corrélation du problème, est de taille importante et la résolution de ce problème est très coûteuse. Par contre, il y a des façons de réduire le coût de calcul de ce problème, comme nous allons le voir par la suite.

3.2.2. Problème de valeurs propres associées

La première solution est basée sur un problème de valeurs propres associé de taille beaucoup plus petite. En sachant que la taille du problème original est beaucoup plus importante que le nombre d'échantillons obtenus par la méthode POD, il est possible d'appliquer (16) à la matrice de corrélation SS^* et montrer qu'elle n'est pas de plein rang et a donc des valeurs propres nulles.

$$\text{rang}(XY) \leq \min(\text{rang}(X), \text{rang}(Y)) \quad (16)$$

En multipliant (15) à gauche pour S^* on trouve (17).

$$S^*SS^*v = \lambda S^*v \quad (17)$$

Dans (17) il est possible d'identifier un vecteur $y \in \mathbb{R}^q$ comme en (18).

$$y = S^*v \quad (18)$$

Cela permet d'identifier un problème de valeurs propres beaucoup plus petit que l'original indiqué en (19). Il est évident que

les valeurs propres de ce nouveau problème sont égales aux valeurs propres différentes de zéro du problème original. De plus, la relation entre les vecteurs propres est donnée par (18).

$$S^* S y = \lambda y \quad (19)$$

Pour retrouver le vecteur v , on peut multiplier (18) à gauche pour S et appliquer (15) pour obtenir (20).

$$v = \frac{1}{\lambda} S y \quad (20)$$

Cela nous permet de reconstruire les vecteurs propres du problème original à partir des vecteurs propres du problème associé. Par contre, le résultat n'est pas de norme 1. Il faut, donc, normaliser les vecteurs. Ce résultat est montré en (21).

$$v = \sqrt{\frac{1}{\lambda}} S y \quad (21)$$

La norme du vecteur x lié à chaque vecteur v est donnée par la valeur propre associée. Cela peut être utilisé comme un indice de qualité de la réduction.

3.2.3. Décomposition en valeurs singulières

Une autre façon de résoudre (15) avec un coût de calcul réduit est l'application directe de la décomposition en valeurs singulières à la matrice S . Cette décomposition est montrée en (22). La matrice Σ est diagonale et les matrices U et V sont telles que $U^* U = I$ et $V^* V = I$.

$$S = U \Sigma V^* \quad (22)$$

En substituant (22) dans la matrice de corrélation du problème, on trouve le résultat (23).

$$S S^* = U \Sigma \Sigma^* U^* \quad (23)$$

Cela peut être directement interprété comme étant la décomposition en valeurs propres d'une matrice. Les vecteurs propres sont les colonnes de la matrice U et les valeurs propres sont les valeurs diagonales de la matrice $\Sigma \Sigma^*$.

Ainsi, il est possible de résoudre le problème (15) simplement en faisant une décomposition en valeurs singulières de la matrice de snapshots. Pour réduire encore plus le coût de calcul, la version « économique » de l'algorithme peut être utilisé.

3.2.4. Méthode POD Fréquentielle

La version temporelle de la méthode POD cherche une matrice V capable de bien représenter la simulation temporelle du système. En utilisant cette même logique, la méthode POD peut être formulée pour chercher une matrice que représente mieux la simulation fréquentielle.

Pour une seule fréquence w , la transformation de Laplace du vecteur d'état est donnée par (24).

$$\mathcal{L}\{x\} = (Ej\omega - A)^{-1} B \quad (24)$$

En choisissant plusieurs valeurs pour w on peut regrouper les réponses dans une matrice d'échantillons comme fait auparavant.

Pour trouver la matrice que représente mieux cet ensemble, une des deux techniques utilisées pour la version temporelle peut être appliquée. Le modèle réduit est donc obtenu par la même logique de projection utilisée auparavant.

4. ÉQUIVALENCE DES MÉTHODES

Il est possible de démontrer que sous certaines conditions les deux méthodes (POD et correspondance de moments) sont équivalentes. Pour obtenir ce résultat il faut d'abord démontrer que ce qui est important pour la matrice V est son sous-espace vectoriel engendré et non pas les valeurs de la matrice. C'est-à-dire que différentes matrices avec le même sous-espace vectoriel engendré produisent modèles réduits équivalents.

Deux matrices ont le même sous-espace vectoriel engendré s'il y a un changement de base que fait la liaison entre eux. Mathématiquement cela peut être exprimé comme en (25). Dans cette équation $V, V' \in \mathbb{C}^{n \times q}$ et X est une matrice de plein rang de taille appropriée qui représente le changement de base.

$$V' = V X \quad (25)$$

En substituant V pour V' en (25) et faisant le développement il est possible de démontrer que cela ne change pas la fonction de transfert du système réduit. Ce processus est montré en (26).

$$\begin{aligned} G'(s) &= C V' (W^T (E s - A) V')^{-1} W^T B \\ G'(s) &= C V X (W^T (E s - A) V X)^{-1} W^T B \\ G'(s) &= C V X X^{-1} (W^T (E s - A) V)^{-1} W^T B \\ G'(s) &= C V (W^T (E s - A) V)^{-1} W^T B \\ G'(s) &= G(s) \end{aligned} \quad (26)$$

Si on utilise la méthode de Krylov sur un point d'expansion avec un seul moment, le résultat est l'opposé de celui obtenu pour un seul point d'échantillonnage. Le sous-espace vectoriel est le même, parce que les deux vecteurs sont liés par une multiplication scalaire.

Ce processus peut être répété pour plusieurs points d'expansion. Cela résultera en différentes matrices mais avec le même sous-espace vectoriel engendré. Pour que cela soit vrai, il faut que tous les points d'expansion soient conservés pour la méthode POD. C'est-à-dire, le nombre de colonnes de la matrice de projection doit être égal au nombre de points d'échantillonnage.

5. CHOIX ADAPTATIVE DES POINTS D'EXPANSION

Quand on utilise la méthode de Krylov pour réduire un système, il est très important de choisir le placement des points d'expansion. Cette tâche peut être faite de façon empirique en utilisant la connaissance que l'utilisateur a du système qu'il modèle. Toutefois, cela ne règle pas le problème pour des systèmes dont on ne connaît pas la forme de la fonction de transfert. Dans cette section nous présentons une façon automatique de placer les points d'expansion.

Le choix de la position et du nombre de moments pour chaque point d'expansion est très important pour la précision du modèle réduit. Si on ne connaît pas la réponse du système complet, il faut développer une méthode pour estimer l'erreur du système réduit de façon à ce qu'on puisse savoir s'il faut augmenter la dimension du projecteur ou si la convergence a été atteinte. Un autre problème se produit à cause des erreurs numériques. On ne peut pas augmenter indéfiniment l'ordre d'un point d'expansion à cause de la perte d'orthogonalité du sous-espace de Krylov. Donc, d'un point de vue numérique c'est plus avantageux de mettre plusieurs points d'expansion avec quelques moments que l'inverse.

L'idée principale pour savoir si la fonction de transfert est juste autour d'un point est : si en ajoutant un point d'expansion rien ne change, la réponse trouvée auparavant était juste.

Voici une méthode adaptative que nous avons développée et qui met en œuvre ce principe. D'abord, l'utilisateur doit fournir une plage de fréquences dont il souhaite que la réponse du modèle réduit soit bien précise. Un point d'expansion avec deux moments est placé dans chaque extrémité de la plage choisie.

La réponse fréquentielle de ce système est donc enregistrée et toute la plage de fréquences est ajoutée dans une pile comme le premier intervalle.

Désormais, ce processus sera répété jusqu'à ce que la pile soit vide. L'intervalle au sommet de la pile est reçu et un point d'expansion est ajouté à son milieu. Si la réponse fréquentielle dans cette région change plus qu'une tolérance délimitée par l'utilisateur, cet intervalle est divisé en deux et ces nouveaux intervalles sont ajoutés à la pile. Sinon, le point d'expansion n'est pas ajouté au modèle réduit.

L'algorithme 1 résume ces deux derniers paragraphes.

Données : Système (sys), Fréquence Inférieure (fl),
Fréquence Supérieure (fu) et tolérance (tol)

Résultat : Modèle Réduit

Placement de points d'expansion à fl et fu ;

pile ← Initialise pile avec l'intervalle [fl, fu];

tant que pile n'est pas vide **faire**

 intervalle ← Désempiler (pile);

 Ajouter point d'expansion au milieu (sys) ;

 error ← calcul du changement de la réponse;

si max {error} ≤ tol **alors**

 Enlever le point d'expansion (sys);

sinon

 Pile ← Empile les deux nouveaux intervalles ;

fin

fin

Algorithme 1 : Placement automatique des points d'expansion

6. APPLICATIONS

Dans cette section, chaque idée développée dans cet article est appliquée et analysée.

Deux systèmes sont utilisés comme base pour les applications. Le premier exemple d'application utilisé est une antenne boucle d'ordre initial de 4065 [9]. Le modèle a été obtenu par l'application de la méthode PEEC [7] à la géométrie de la Figure 1. La taille du système reste raisonnable, mais elle est suffisante pour illustrer ces méthodes de réduction.

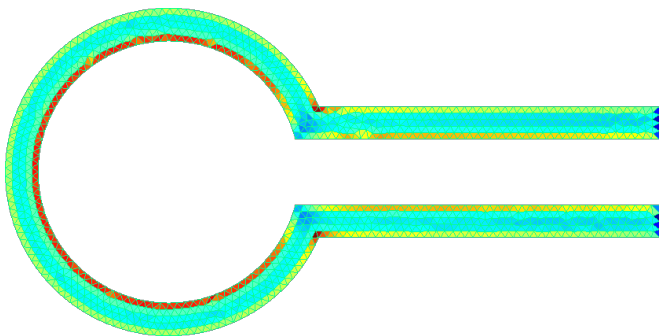


Fig. 1. Illustration de l'antenne boucle

La physique nous révèle que le système est stable et que la matrice E et la matrice A sont respectivement définie positive et définie négative. Si on fait le choix du sous-espace W comme étant égal à V , ces propriétés seront préservées dans le modèle réduit [10].

Le deuxième système est une poutre modélisée par la méthode des éléments finis [12]. L'entrée du modèle est la charge dans une extrémité et la sortie est le déplacement du bout de la poutre. La taille du système complet est 2400.

6.1. Placement automatique des points d'expansion

La méthode de placement automatique des points d'expansion a été appliquée au problème de l'antenne boucle. La plage de fréquence choisie est 1-20 Ghz. Les points aux extrémités de l'intervalle sont calculés avec deux moments, tandis que tous les autres n'utilisent qu'un seul moment. Le résultat de l'application de cette méthode est montré dans le tableau 1.

Tableau 1. Points d'expansion trouvés par la méthode de placement automatique

Position [Ghz]	Nombre de moments
1.0	2
4.47	1
2.11	1
9.45	1
6.50	1
13.75	1
20.0	2

La Figure 2 compare le modèle réduit avec le système complet. Les points d'expansion sont aussi représentés.

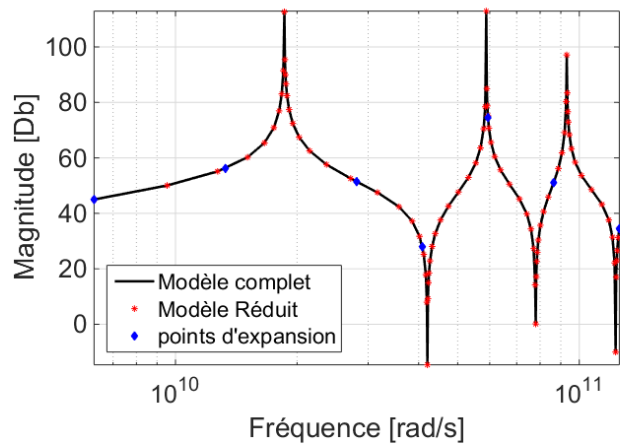


Fig. 2. Réponse du système réduit obtenu par la méthode de placement automatique des points d'expansion

La méthode utilisée a été la technique de correspondance de moments. Le processus de réduction et simulation du modèle réduit a pris 72 secondes et le processus de simulation du modèle complet a pris 1230 secondes.

Il est ainsi possible de conclure que la méthode de placement automatique de points a choisi de bonnes positions pour l'expansion et que le processus de réduction d'ordre a obtenu des résultats très satisfaisants en environ 6% du temps de calcul.

6.2. Équivalence de méthodes

Les mêmes points d'expansion du tableau 1 ont été utilisés pour réduire le système en utilisant la méthode POD fréquentielle. La différence entre la réponse des deux méthodes est montrée en 3.

La plus grande différence entre les deux méthodes est de -110 Db, une valeur très petite. Cela peut être attribué aux erreurs numériques et on peut conclure que dans les conditions présentées, les systèmes sont vraiment équivalents.

6.3. Comparaison temporelle

Pour cet exemple, le modèle de la poutre a été utilisé. La réduction pour la méthode POD a utilisé une fonction échelon

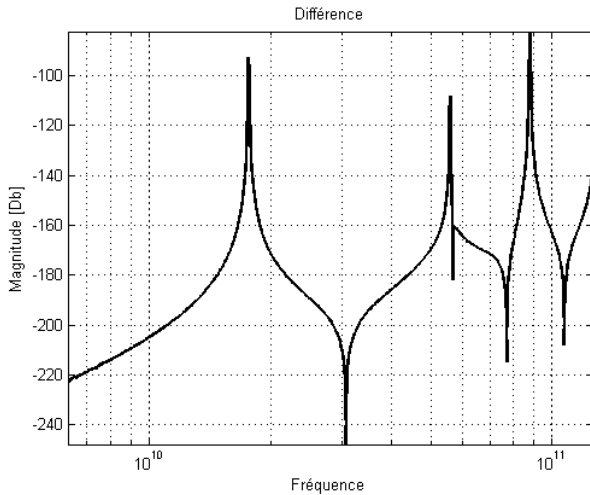


Fig. 3. Différence entre les deux méthodes de réduction d'ordre

comme entrée pour la simulation. Le système a été simulé jusqu'à 0.1 s, ce qui a produit 106 snapshots. L'ordre du modèle réduit a été choisi comme étant 22.

Le système réduit obtenu par la méthode de Krylov utilise un point d'expansion avec 22 moments placés à zéro. Cela a été fait parce que ce choix produit un projecteur réel.

La Figure 4 présente la réponse à une impulsion des systèmes réduits.

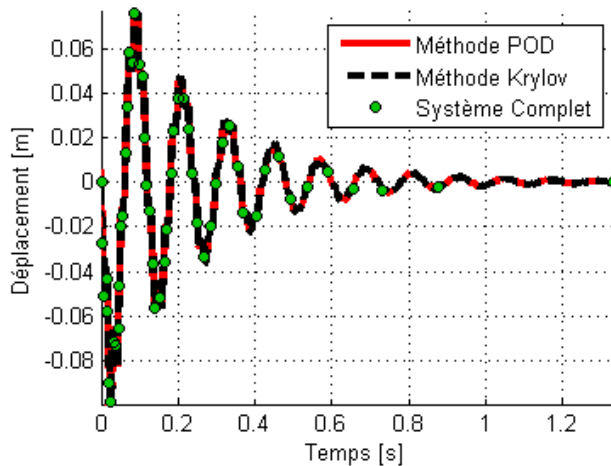


Fig. 4. Réponse à une impulsion

Il est possible de remarquer comme les deux méthodes ont été bien capables de suivre la réponse du système complet. Pour qu'on puisse comparer mieux le résultat, la Figure 5 présente la différence entre les systèmes réduits et la référence.

Il est possible de dire que le modèle réduit par la méthode de Krylov est plus proche de la référence que le système obtenu par POD. Il est aussi possible de conclure que l'erreur est plus importante au début de la simulation. Cela est attendu une fois que les instantes initiales ont un comportement de très haute fréquence qui n'a pas été bien représenté à cause du choix de la fonction d'entrée et position du point d'expansion.

7. CONCLUSIONS

Deux méthodes différentes de réduction de modèle ont été présentées. Nous avons établi que la méthode POD fréquentielle, sous certaines conditions, est une application spécifique de la méthode de correspondance des moments.

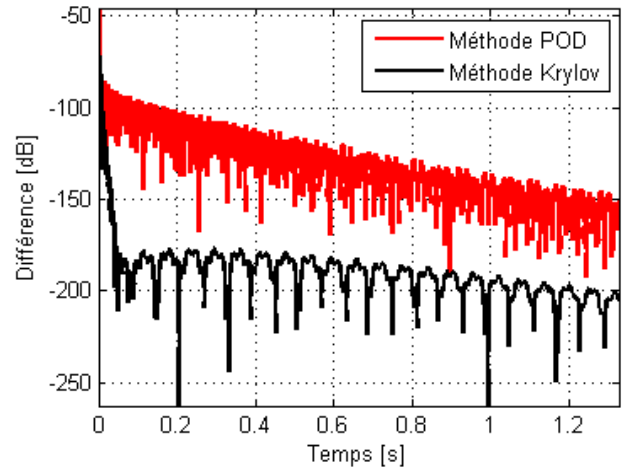


Fig. 5. Différence entre le modèle réduit et la référence

Le problème du placement des points d'expansion a été résolu par l'application d'une méthode adaptative.

Les résultats obtenus ont montré que la variation fréquentielle de la POD est plus adaptée à la réduction de circuits linéaires que la version temporelle.

La réduction d'ordre de systèmes physiques linéaires par la méthode de correspondance des moments est donc une méthode que nous privilégions.

8. RÉFÉRENCES

- [1] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Advances in Design and Control. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- [2] W. E. Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Q. Appl. Math.*, 9(17) :17–29, 1951.
- [3] Michel Bergmann. *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal : application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. PhD thesis, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL, 2004.
- [4] G Berkooz, P Holmes, and J L Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 25(1) :539–575, 1993.
- [5] A. Castagnotto, H. K. F. Panzer, K.-D. Reinsch, and B. Lohmann. Stability-Preserving, Adaptive Model Order Reduction of DAEs by Krylov-Subspace Methods. *ArXiv e-prints*, August 2015.
- [6] P. Feldmann and R.W. Freund. Efficient linear circuit analysis by pade approximation via the lanczos process. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 14(5) :639–649, May 1995.
- [7] F. Ferranti, G. Antonini, T. Dhaene, L. Knockaert, and A.E. Ruehli. Physics-based passivity-preserving parameterized model order reduction for peec circuit analysis. *Components, Packaging and Manufacturing Technology, IEEE Transactions on*, 1(3) :399–409, March 2011.
- [8] F. Freschi, G. Gruosso, and M. Repetto. Unstructured peec formulation by dual discretization. *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE*, 16(10) :531–533, Oct 2006.
- [9] F. Freschi, G. Gruosso, and M. Repetto. Unstructured peec formulation by dual discretization. *Microwave and Wireless Components Letters, IEEE*, 16(10) :531–533, Oct 2006.
- [10] L. Miguel Silveira, M. Kamon, I. Elfadel, and J. White. A coordinate-transformed arnoldi algorithm for generating guaranteed stable reduced-order models of rlc circuits. In *Computer-Aided Design, 1996. ICCAD-96. Digest of Technical Papers., 1996 IEEE/ACM International Conference on*, pages 288–294, Nov 1996.
- [11] B. Moore. Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(1) :17–32, Feb 1981.
- [12] Heiko Panzer, Jörg Hubele, Rudy Eid, and Boris Lohmann. Generating a

parametric finite element model of a 3d cantilever timoshenko beam using matlab. *Tech. reports on aut. control, Inst. Aut. Control, TU München*, 2009.

- [13] Heiko Panzer, Jan Mohring, Rudy Eid, and Boris Lohmann. Parametric model order reduction by matrix interpolation. *at-Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs-und Informationstechnik*, 58(8) :475–484, 2010.
- [14] Heiko KF Panzer. *Model Order Reduction by Krylov Subspace Methods with Global Error Bounds and Automatic Choice of Parameters*. PhD thesis, Universität München, 2014.
- [15] W.H. Schilders, H.A. van der Vorst, and J. Rommes. *Model Order Reduction : Theory, Research Aspects and Applications*. Mathematics in Industry. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [16] Peter J Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of fluid mechanics*, 656 :5–28, 2010.