

# Modélisation générique pour les stratégies de modulation des onduleurs multiniveaux : application aux onduleurs à capacités flottantes

K. BERKOUNE, P-E. VIDAL, F. ROTELLA

Laboratoire Génie de Production, Université Fédérale Toulouse Midi-Pyrénées, INPT-ENIT.

**RESUME** – Les travaux présentés définissent une nouvelle approche pour la modélisation et la génération de stratégie de modulation des convertisseurs statiques, en particulier pour les onduleurs de tension multiniveaux. Un modèle générique, applicable aux onduleurs multiniveaux, est développé. L'inverse généralisée, permettant de résoudre un système linéaire surdimensionné, permet d'exprimer l'ensemble des solutions admissibles pour les fonctions de modulation. Cette résolution permet de trouver des degrés de liberté, à identifier dans un premier temps, puis à exprimer dans un deuxième temps en établissant le lien avec les critères à optimiser pour des architectures données. L'extension du modèle moyen obtenu pour les systèmes triphasés est réalisée pour les structures usuelles à  $N$  niveaux de tension telles que la structure d'onduleur à capacités flottantes FC. Un exemple d'illustration à partir d'un onduleur FC à trois niveaux est présenté.

**Mots-clés** – Modélisation, Onduleurs multiniveaux, Stratégie de modulation, Inverses généralisées.

## 1. INTRODUCTION

### 1.1. Contexte

Les convertisseurs statiques sont des dispositifs électriques nécessitant la conversion de l'énergie électrique d'une forme vers une autre. Ils sont mis en œuvre dans de nombreuses applications telles que le ferroviaire, l'aéronautiques ou l'automobile, où des convertisseurs DC-AC appelés onduleurs sont parfois nécessaires.

Tous ces domaines d'application ont engendré et suscitent encore des études qui développent, testent et proposent différentes structures des onduleurs de tension ou différents algorithmes pour les piloter [1].

### 1.2. Objectifs

Le but de cette étude est la définition d'une nouvelle approche pour la modélisation et la génération de stratégies de modulation des convertisseurs statiques. De par sa première mise en œuvre [2], elle adresse la Modulation de Largeur d'Impulsion (MLI) basée sur une comparaison triangle-porteuse, mais pourrait être étendue aux modulations vectorielles.

Dans cet article nous allons d'abord présenter le modèle de l'onduleur triphasé classique qui admet une équation d'un système linéaire qui s'écrit sous la forme  $V'_{ln} = k_E F \alpha$ . Dans un deuxième temps, nous allons démontrer que ce modèle est valable et généralisable pour les architectures multiniveaux notamment les onduleurs à capacités flottantes à  $N$  niveaux de tension.

Le principal objectif vise à exprimer l'ensemble des solutions mathématiques liant les rapports cycliques aux tensions de références, permettant de trouver les degrés de liberté, par utilisation de la notion d'inverses généralisées qui sera détaillée par la suite.

Le travail mené aborde aussi le lien entre l'expression des degrés de liberté,  $\lambda_i$ , et les solutions particulières de MLI mises en œuvre. A des fins d'illustration, une application de l'approche sur les onduleurs MMC est aussi présentée.

Afin d'utiliser un modèle moyen pour le convertisseur, des hypothèses ont été prises en compte :

- Le courant n'évolue pas pendant la transition de tension durant une période de commutation. Par conséquent on peut ne s'intéresser qu'à la valeur moyenne du signal de tension de sortie.
- A chaque période de commutation, l'interrupteur change d'état une seule fois pour éviter les pertes par commutation.
- Lors d'une comparaison modulante - porteuse, le signal de sortie vaut 1 si la porteuse est plus grande que la modulante, sinon il vaut 0 (lorsqu'un signal de commande 1 est appliqué à l'interrupteur, celui-ci est considéré comme étant fermé, et lorsque le signal 0 est appliqué, l'interrupteur est considéré ouvert).

## 2. MODÈLE MOYEN D'UN ONDULEUR TRIPHASÉ

### 2.1. Modèle initial

Dans le cas de structures d'onduleurs triphasés à deux niveaux de tension, le modèle moyen, déjà appliqué, permet d'exprimer les tensions de sortie  $V_{ln}$  en fonction des rapports cycliques  $\alpha$  :

$$V_{ln} = k_E M \alpha = k_E \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \alpha. \quad (1)$$

$V_{ln}$  la tension de charge telle que  $V_{ln} = [V_{an} \ V_{bn} \ V_{cn}]^T$ ,  $k_E$  : un coefficient lié à la structure du convertisseur utilisé, fonction de la tension du bus-dc  $E$ ,  $M$  est la matrice de liaison.  $n$  est le neutre de la charge.

Ainsi, dans la figure 1, la boucle d'action prend en compte le processus de modulation où des variables d'entrée (les rapports cycliques  $\alpha$  dans le cas d'une MLI ou les instants de commutation dans le cas d'une MLI vectorielle) sont injectées. Ces derniers sont liés aux tensions  $V_{ln}$  par la matrice  $M$ . Enfin, les tensions appliquées au modèle de charge permettent de rendre compte du comportement de la charge. A partir du modèle de connaissance de la charge et du convertisseur, un pilotage de l'ensemble n'est possible que lors de la prise en compte de la boucle de réaction. Généralement l'inversion successive des blocs de la ligne d'action du modèle ou l'insertion de correcteurs est utilisé. Il est remarquable que la relation liant  $\alpha$  à  $V_{ln}$  est linéaire. Il serait donc nécessaire de trouver l'inverse de  $M$  dans la boucle de réaction. Cependant, la matrice  $M$  n'admet pas d'inverse dans le cas des onduleurs de tension triphasés.

L'expression du modèle moyen de l'onduleur définie en (1) permet de déduire que ce système est compatible mais il admet un nombre infini de solutions.

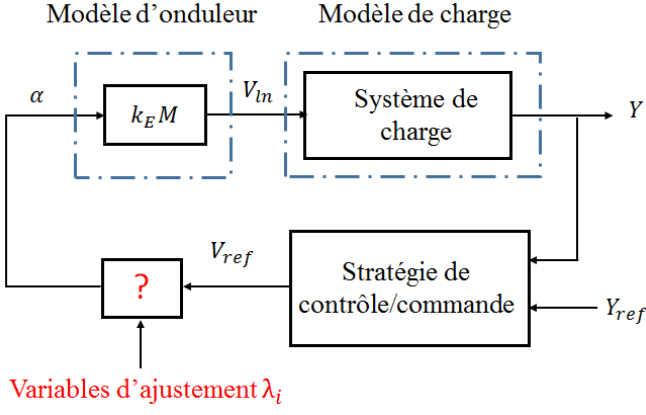


Fig. 1. Schéma fonctionnel du modèle de l'onduleur et de sa charge

Effectivement, le système est compatible car :

$$\text{Rang}[M] = \text{Rang}[M \quad V_{in}] = 2. \quad (2)$$

Par ailleurs il admet une infinité de solutions car :

$$\text{Rang}[M] < \text{Dimension de } \alpha. \quad (3)$$

## 2.2. Modèle réduit

En considérant que le système triphasé est équilibré, alors :

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0. \quad (4)$$

Le système peut alors être réduit car il suffit de connaître deux tensions parmi  $V_{an}$ ,  $V_{bn}$  et  $V_{cn}$  pour en déduire la troisième à partir de l'équation (4). Donc l'expression (1) peut être écrite sous la forme du système réduit compatible :

$$V'_{in} = k_E F \alpha, \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

où  $V'_{in}$  la tension réduite telle que  $V'_{in} = [V_{an} \quad V_{bn}]^T$ . Bien que  $F$  soit singulière, ce système est déjà mis en œuvre et utilisé très largement, par exemple [3]. Dans ces choix de modulation que nous qualifierons d'empiriques, les variables mesurées  $Y$  sont comparées avec les variables de référence  $Y_{ref}$  afin d'avoir les tensions de références  $V_{ref}$  suite à la mise en place de correcteurs dans le bloc "Stratégie de contrôle / commande", Fig. 1. De nos jours, les tensions de références sont ensuite adaptées (par le biais de coefficients) et corrigées par l'addition de valeurs d'ajustement, notées ici  $\lambda_i$  qui sont des degrés de liberté. Ainsi s'obtiennent des solutions particulières pour les rapports cycliques  $\alpha$ .

Le modèle d'onduleur triphasé à deux niveaux de tension admet une équation d'un système linéaire qui s'écrit sous la forme  $V'_{in} = k_E F \alpha$ , l'objectif consiste à démontrer que ce modèle moyen est valable pour les toutes les architectures d'onduleurs multiniveaux.

## 3. MODÈLE GÉNÉRIQUE D'UN ONDULEUR À CAPACITÉ FLOTTANTE À N NIVEAUX

Pour développer les modèles d'onduleurs à cellules imbriquées à  $N$  niveaux de tension sur des architectures réelles, une première étape consiste à considérer un bras d'onduleur à capacités flottantes - FC, à  $N$  niveaux de tension qui est composé de  $(N-1)$  cellules imbriquées de commutation et chaque cellule est liée à une source de tension qui, elle-même, est une fraction de la tension du bus continu, figure 2. Les sources de tensions de chaque cellule sont considérées comme des capacités. La différence de tension entre deux capacités successives est toujours égale à  $\frac{E}{N-1}$ .

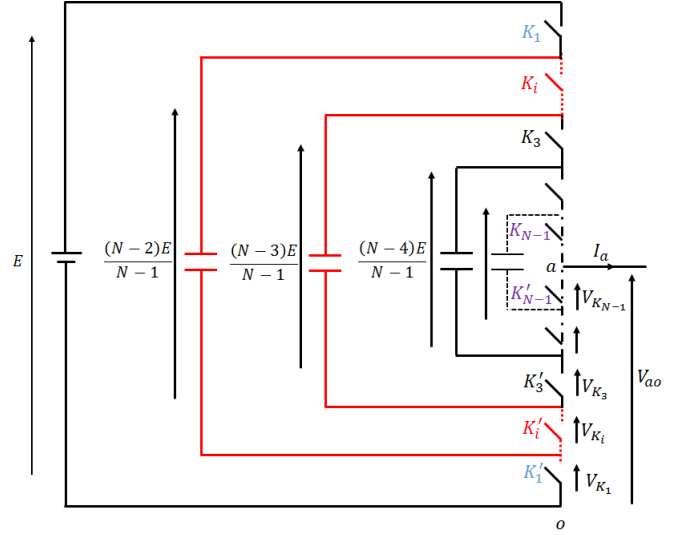


Fig. 2. Bras d'onduleur FC à N niveaux de tension.

L'expression de la tension du bras  $a$ ,  $V_{ao}$ , est obtenue à partir de la figure 2 et elle est donnée comme suit :

$$V_{ao} = \sum_{i_{1bras}=1}^{N-1} V_{K_i}. \quad (6)$$

Afin de définir l'expression de la valeur moyenne de la tension au sein d'une cellule de commutation quelconque, le schéma de la figure 2, où l'équation de la maille apparaît en rouge, est utilisée.

Au sein de la  $i$  ème cellule du premier bras, la tension aux bornes de l'interrupteur  $K'_i$  est nommée  $V_{K'_i}$ , telle que :

$$V_{K'_i} = \frac{E}{N-1} \alpha_{i_{1bras}}, \quad (7)$$

avec  $\alpha_{i_{1bras}}$ , les rapports cycliques dédiés à un seul bras et  $i_{1bras} \in \{1, \dots, (N-1)\}$ .

$$\alpha_{i_{1bras}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Donc, l'expression (6) devient :

$$V_{ao} = \sum_{i_{1bras}=1}^{N-1} \frac{E}{N-1} \alpha_{i_{1bras}} = \frac{E}{N-1} S \alpha_{i_{1bras}}, \quad (9)$$

où  $S = [1 \quad \dots \quad 1]$  est un vecteur ligne de dimension  $(N-1)$ .

### 3.1. Extension à un onduleur triphasé multiniveaux

L'extension du modèle, décrit dans l'équation (9), à un système triphasé permet de trouver l'expression de la tension  $V_{lo}$  comme suit :

$$V_{lo} = \begin{bmatrix} V_{ao} \\ V_{bo} \\ V_{co} \end{bmatrix} = \frac{E}{N-1} \begin{bmatrix} S & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & S & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & S \end{bmatrix} \alpha_{i_{3bras}}, \quad (10)$$

avec  $\alpha_{i_{3bras}}$  sont les rapports cycliques dédiés aux trois bras d'onduleur et la dimension de  $i_{3bras}$  est de  $3(N-1)$ .

Afin de pouvoir simplifier cette expression, nous ferons appel au produit de Kronecker appelé aussi "produit tensoriel". Il se note avec le symbole " $\otimes$ ", [4].

Donc, l'expression (10) est simplifiée et peut être écrite sous la forme :

$$V_{lo} = \frac{E}{N-1} (I_3 \otimes S) \alpha_{i_{3bras}}, \quad (11)$$

avec  $I_3$  est une matrice identité de dimensions 3 et  $\alpha_{i_{3bras}}$  sont les rapports cycliques pour les trois bras d'onduleur de dimension  $3(N-1)$ .

Finalement, un modèle moyen de l'onduleur et de sa charge peut être considéré si la tension de neutre de la charge est exprimée. Ainsi, l'expression de la tension  $V_{ln}$  peut être écrite comme suit :

$$V_{ln} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} V_{lo} = \frac{1}{3} M V_{lo}. \quad (12)$$

Comme mentionné dans la section précédente, le modèle initial peut être réduit, ainsi en remplaçant l'expression de  $V_{lo}$  définie par (10) dans (12), la tension de charge réduite s'écrit comme suit :

$$V'_{ln} = \frac{E}{3(N-1)} F (I_3 \otimes S) \alpha_{i_{3bras}}. \quad (13)$$

Rappelons que  $F$  est la matrice réduite de  $M$ . En raison de la propriété particulière du produit de Kronecker [5] et [4] telle que :

$$(A \otimes C)(B \otimes D) = AB \otimes CD, \quad (14)$$

et dans le cas particulier où  $C = 1$ , [6], alors :

$$(A)(B \otimes D) = AB \otimes D. \quad (15)$$

En appliquant cette propriété dans (13) et en définissant le paramètre  $k_{FC}$  tel que,  $k_{FC} = \frac{E}{3(N-1)}$ , l'expression généralisée de la tension de charge réduite pour un onduleur triphasé à cellules imbriquées à  $N$  niveaux s'écrit sous la forme :

$$V'_{ln} = k_{FC} (F \otimes S) \alpha_{i_{3bras}}. \quad (16)$$

$\alpha_{i_{3bras}}$  sont des vecteurs colonnes de dimension  $3(N-1)$ . Ainsi pour chaque phase, le modèle fait apparaître  $(N-1)$  rapports cycliques à appliquer aux  $(N-1)$  cellules de commutation qui le composent, ainsi que la matrice  $F$  précédemment définie dans l'équation (5). Sachant qu'il a été démontré dans [7] que :

$$\text{Rang}(A \otimes B) = \text{Rang}(A) * \text{Rang}(B). \quad (17)$$

En prenant compte de cette propriété et en l'appliquant à l'équation (16), alors :

$$\text{Rang}(F \otimes S_{FC}) = \text{Rang}(F) * \text{Rang}(S_{FC}) = 2 * 1 = 2. \quad (18)$$

Nous constatons que quelque soit le nombre de niveaux  $N$ , le rang de la matrice reliant la tension  $V'_{ln}$  aux rapports cycliques  $\alpha_{i_{3bras}}$  dans le cas d'une architecture FC est toujours égal à 2. Or en définissant  $DDL$  comme étant le nombre de Degré De Liberté,  $Nc$  le nombre de colonne, alors :

$$DDL = Nc(F \otimes S_{FC}) - \text{Rang}(F \otimes S_{FC}). \quad (19)$$

Donc, d'une manière générale, le nombre de degrés de liberté  $DDL$ , dans le cas d'une architecture d'onduleur à capacités flottantes à  $N$  niveaux de tension, s'exprime comme suit :

$$DDL = 3(N-1) - 2 = 3N - 5. \quad (20)$$

#### 4. RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Le but de cette étude est de traiter ce système d'équations pour exprimer l'ensemble des solutions. Pour ce faire, une présentation de la théorie des inverses généralisées, concept qui sera utilisé par la suite, est abordée. Ensuite une mise en œuvre est faite afin de trouver les ensembles de solutions.

##### 4.1. Généralités sur les inverses généralisées

L'objectif consiste à résoudre l'équation du système linéaire compatible afin d'exprimer les rapports cycliques dans le cas de modulation de type sinus en fonction des tensions de référence, et pour cela il serait donc nécessaire de trouver l'inverse de la matrice  $(F \otimes S)$ . Comme nous pouvons voir que la matrice  $F$ , n'admet pas d'inverse en raison de sa singularité, et donc nous ne pouvons pas exprimer les rapports cycliques en fonction des tensions de références par une simple inversion. Pour cela, nous faisons appel à la théorie des inverses généralisées.

##### 4.2. Notion d'inverses généralisées

Cette notion d'inverses généralisées généralise la définition de l'inverse d'une matrice carrée (ou d'une application linéaire), à des matrices quelconques (pas nécessairement carrées ou inversibles). La notion de pseudo-inverse a été utilisée en premier par Ivar Fredholm en 1903 dans le cadre d'inversion d'opérateurs intégraux, puis elle a été décrite pour la première fois par Eliakim Hastings Moore en 1920 et Roger Penrose en 1955, [8].

Il est bien connu que chaque matrice carrée non singulière appelée  $A$  a une inverse unique, notée  $A^{-1}$ , qui satisfait :

$$AA^{-1}A = A. \quad (21)$$

Au début du  $XX^{\text{eme}}$  siècle, le besoin d'adapter une démarche similaire pour des matrices singulières est primordial, Cela conduit à la notion d'inverse généralisée [9] [10].

Par exemple, lorsque une matrice  $A$  est singulière de dimensions  $n * m$  avec  $m \neq n$ , il existe un ensemble d'inverses généralisées,  $A^{[1]}$  qui vérifie la propriété suivante :

$$AA^{[1]}A = A. \quad (22)$$

Certaines propriétés de l'inverse généralisée sont mentionnées dans [10], [11], [12] et [13]. Elles possèdent certaines des propriétés de l'inverse classique. En effet, lorsque  $A$  est une matrice non singulière,  $A^{[1]} = A^{-1}$ .

Les travaux de Moore [14], [15] et Penrose [16], ont permis de définir une inverse généralisée particulière appelée "pseudo-inverse de Moore-Penrose".

On appelle matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose de  $A$ , une matrice  $X$  vérifiant ces quatre propriétés :

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ (AX)^* = XA \\ (XA)^* = AX \end{cases}. \quad (23)$$

$A^*$  désigne la matrice transposée de la matrice conjuguée de  $F$  c'est à dire sa transconjugée.

Toute matrice  $X$  vérifiant ces quatre propriétés est une pseudo-inverse de  $A$  que l'on notera  $A^\dagger$ . Il est possible de n'imposer que quelques propriétés parmi les quatre car elles ne sont pas toutes nécessaires pour la résolution des systèmes linéaires.

La principale propriété de la pseudo-inverse  $A^\dagger$  est que pour toute matrice  $A$ ,  $A^\dagger$  existe et est unique [17]. Un des moyens d'obtenir la pseudo-inverse de la matrice  $A$  est la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice  $A$  [12].  $A^\dagger$  peut être facilement calculée numériquement par différents logiciels. Un exemple d'obtention de  $A^\dagger$  sera donné à la section suivante.

Il est évident que  $A^\dagger$  est une inverse généralisée particulière de  $A$ . L'un des buts de la théorie de l'inverse généralisée est d'obtenir l'ensemble des solutions d'un système linéaire.

L'idée de généraliser la notion d'inverse vient de la nécessité de résoudre des systèmes d'équations du type :

$$Ax = b, \quad (24)$$

où  $A$  est une matrice, pas nécessairement carrée, comportant  $m$  lignes et  $n$  colonnes,  $x$  le vecteur à  $n$  inconnues à déterminer et  $b$  est un vecteur colonne de dimensions  $m$ . Un tel système peut avoir zéro, une, ou une infinité de solutions exactes.

Le système  $Ax = b$  admet au moins une solution si et seulement si :

$$\text{Rang}[A] = \text{Rang}[A \quad b]. \quad (25)$$

De plus, si  $\text{Rang}[A] = n$ , alors le système admet une unique solution. Sinon, le système admet une infinité de solutions.

La résolution du système de l'équation linéaire obtenue dans (24) est définie sous la forme :

$$x = A^{[1]}b + (I_m - A^{[1]}A)z. \quad (26)$$

- $z$  est un vecteur arbitraire qui permet d'explorer l'ensemble des solutions.
- $A^{[1]}$  est une inverse généralisée de  $A$ .
- $I_m$  est la matrice identité de dimension  $m$ .

Comme  $A^\dagger$  est une inverse généralisée particulière, l'ensemble des solutions (26) peut être généré comme suit :

$$x = A^\dagger b + (I_m - A^\dagger A)z. \quad (27)$$

L'équation (27) contient deux termes :

- Une solution de base :  $A^\dagger b$ .
- Une solution libre :  $(I_m - A^\dagger A)z$ .

## 5. RÉOLUTION DU SYSTÈME D'ONDULEUR À CAPACITÉS FLOTTANTES À $N$ NIVEAUX DE TENSION

Nous rappelons que dans le cas d'un onduleur à  $N$  niveaux de tension, chaque bras contient  $(N - 1)$  cellules de commutation et donc  $(N - 1)$  rapports cycliques.

En utilisant la notion de la pseudo-inverse, l'expression de l'ensemble de solutions de l'équation 16 s'écrit sous la forme :

$$\alpha_{i3bras} = \frac{1}{k_{FC}} (F \otimes S_{FC})^\dagger V'_{ref} + \left( I_{3(N-1)} - (F \otimes S_{FC})^\dagger (F \otimes S_{FC}) \right) z, \quad (28)$$

avec  $V'_{ref} = [V_{anref} \quad V_{bnref}]^T$ .

En utilisant les propriétés du produit de Kronecker illustrées dans [7] et [15] telles que (14) et dans [6] et [18] telles que :

$$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger. \quad (29)$$

Alors l'expression (28) devient :

$$\alpha_{i3bras} = \frac{1}{k_{FC}} (F^\dagger \otimes S_{FC}^\dagger) V'_{ref} + \left( I_{3(N-1)} - (F^\dagger F \otimes S_{FC}^\dagger S_{FC}) \right) z. \quad (30)$$

## 6. APPLICATION À L'ONDULEUR FC À TROIS NIVEAUX

La figure 3 rappelle le schéma d'un bras d'onduleur à capacités flottantes à trois niveaux de tension.

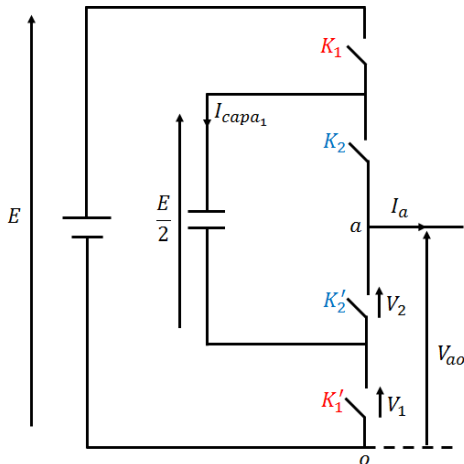


Fig. 3. Bras d'onduleur FC à trois niveaux de tension.

Les rapports cycliques, solutions de l'équation (16) pour  $N = 3$ , sont exprimés :

$$\alpha_{i3bras} = \frac{1}{k_{FC}} (F^\dagger \otimes S_{FC}^\dagger) V'_{ref} + \left( I_6 - (F^\dagger F \otimes S_{FC}^\dagger S_{FC}) \right) z. \quad (31)$$

Il est à noter que le  $\text{Rang}(I_6 - (F \otimes S_{FC})^\dagger (F \otimes S_{FC})) = 4$ . Par conséquent les 4 degrés de liberté sont définis au sein d'un vecteur  $\lambda$  tel que :

$$\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \lambda_4]^T. \quad (32)$$

De manière plus détaillée et en remplaçant chaque paramètre par sa valeur, l'expression (31) devient :

$$\alpha_{i3bras} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{refan} \\ V_{refbn} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 2 & -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Ces degrés de liberté sont fixés au sein de la partie libre de l'expression des ensembles des solutions. Afin d'exprimer ces degrés de liberté pour ensuite les fixer, l'équation (33) doit être réorganisée. C'est la raison pour laquelle, la factorisation du rang maximal de  $(I_6 - (F \otimes S_{FC})^\dagger (F \otimes S_{FC}))$  est nécessaire. Cette factorisation de rang maximal permet d'identifier directement 4 degrés de liberté présentés dans l'expression (32). La partie libre s'exprime sous la forme :

$$(I_6 - (F \otimes S_{FC})^\dagger (F \otimes S_{FC}))z = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} z. \quad (34)$$

Donc, les degrés de liberté sont exprimés et présentés comme suit :

$$\lambda = \begin{bmatrix} -3/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} z. \quad (35)$$

Finalement, l'expression finale des ensembles de solutions est donnée par :

$$\alpha_{i3bras} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{refan} \\ V_{refbn} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

On pose  $G$  telle que :

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

alors dans ce cas l'expression 36 s'écrit :

$$\alpha_{i_{3bras}} = \frac{1}{k_E} F^\dagger V'_{ref} + \frac{1}{3} G \lambda. \quad (38)$$

où  $\alpha_{i_{3bras}} = [\alpha_1^a \ \alpha_2^a \ \alpha_3^b \ \alpha_4^b \ \alpha_5^c \ \alpha_6^c]^T$  sont des rapports cycliques pour les trois bras d'onduleur.

$[\alpha_1^a \ \alpha_2^a]^T$  correspondent aux rapports cycliques appliqués au bras  $a$ .

$[\alpha_3^b \ \alpha_4^b]^T$  correspondent aux rapports cycliques appliqués au bras  $b$ .

$[\alpha_5^c \ \alpha_6^c]^T$  correspondent aux rapports cycliques appliqués au bras  $c$ .

Suite au choix effectué pour la factorisation du rang maximal, il est à noter que parmi les 4 degrés de liberté obtenus, un est commun aux trois bras de l'onduleur, il s'agit de  $\lambda_4$ .  $\lambda_i \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  sont les degrés de liberté propres pour chaque bras  $a, b$  et  $c$  respectivement.

Nous considérons à partir de maintenant que  $\lambda_1 = \lambda_a$  pour le premier bras,  $\lambda_2 = \lambda_b$  pour le deuxième bras et  $\lambda_3 = \lambda_c$  pour le dernier bras.

Comme il a été développé dans [19],  $\lambda_4$  peut être choisi pour garantir une zone de tension maximale de linéarité de l'onduleur. Afin d'étendre cette zone de linéarité, une tension de mode commun est ajoutée aux trois bras d'onduleur [19], ce qui revient à écrire :

$$\lambda_4 = 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{V_{no}}{E} \right), \quad (39)$$

avec  $V_{no}$  la tension de neutre.

### 6.1. Résultats de simulation

Dans la section précédente, pour chaque bras d'onduleur, un degré de liberté a été identifié. Il doit être lié à un critère à optimiser.

Dans le cas des onduleurs FC, l'état de l'art atteste de la difficulté à maintenir constante la tension de capacité au cours du fonctionnement de l'onduleur, sans ajout d'un filtre extérieur (mécanisme d'équilibrage, [20]). Retenons ce critère comme un choix afin de tester la validité de notre approche.

Ainsi, sur la base de la figure 3 :

- Lorsque les interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  sont dans un état fermé, dans ce cas le courant traversant la capacité appelé  $I_{capa_1}$  est nul.
- Lorsque  $K_1$  est fermé et  $K_2$  est ouvert, le courant  $I_{capa_1} = I_a$ .
- Lorsque  $K_1$  et  $K_2$  sont ouverts, donc  $I_{capa_1} = 0$ .

Puisque la relation d'un condensateur idéal s'écrit comme suit :

$$i_{capa_1}(t) = C_1 \frac{dU_{capa_1}}{dt}, \quad (40)$$

alors, en intégrant l'équation 40 sur une période de commutation  $T_c$ , nous obtenons :

$$\int_0^{T_c} i_{capa_1}(t) dt = \int_0^{T_c} C_1 dU_{capa_1}. \quad (41)$$

Sachant que :

- Dans l'intervalle  $[0, \alpha_1^a T_c]$ ,  $K_1$  et  $K_2$  sont ouverts,  $I_{capa_1}$  est nul.
- Dans l'intervalle compris entre  $[\alpha_1^a T_c, \alpha_2^a T_c]$ ,  $K_1$  est fermé et  $K_2$  est ouvert, ce qui se traduit par  $I_{capa_1} = I_a$ .

- Et dans l'intervalle  $[\alpha_2^a T_c, T_c]$ ,  $K_1$  et  $K_2$  sont fermés, et donc  $I_{capa_1}$  est nul.

Donc, l'expression (41) s'écrit,

$$\int_0^{\alpha_1^a T_c} i_{capa_1}(t) dt + \int_{\alpha_1^a T_c}^{\alpha_2^a T_c} i_{capa_1}(t) dt + \int_{\alpha_2^a T_c}^{T_c} i_{capa_1}(t) dt = \int_0^{T_c} C_1 dU_{capa_1}. \quad (42)$$

On en déduit que :

$$(\alpha_2^a - \alpha_1^a) T_c I_a = C_1 \Delta U_{capa_1}. \quad (43)$$

$\Delta U_{capa_1}$  est la variation de la tension de capacité pendant la période  $T_c$  et  $I_a$  est le courant traversant le bras  $a$ .

L'expression (43) peut être établie pour chaque tension de capa de chaque bras et qu'ainsi on démontre que chaque degré de liberté propre au bras  $\lambda_i$  est lié à cette variation de tension.

Finalement, en généralisant cette méthode pour tous les bras d'onduleur, l'expression des degrés de liberté pour l'onduleur FC à trois niveaux de tension s'écrit :

$$\lambda_i = \frac{3 C_i \Delta U_{capa_i}}{2 T_c I_i} \quad \text{avec } i \in \{1, 2, 3\}. \quad (44)$$

$I_i$  est le courant traversant chaque bras de l'onduleur respectivement et  $\Delta U_{capa_i}$  est la variation de la tension de capacité pour chaque bras.  $\lambda_i$  est mesuré à chaque pas de calcul du régulateur.

Afin de valider ce principe, une simulation de l'architecture avec sa modulation est réalisée sur une charge  $R-L$  équilibrée, et les formes d'ondes usuelles sont retrouvées.

Pour démontrer l'intérêt de fixer les degrés de liberté propres à chaque bras, une perturbation, au niveau de la capacité  $C_1$ , est appliquée afin de déséquilibrer les tensions des bras, figure 4. La perturbation consiste à ajouter une résistance en parallèle,  $R_1$ , avec la capacité afin de créer un courant de fuite qui induit une chute de tension au niveau de cette capacité.

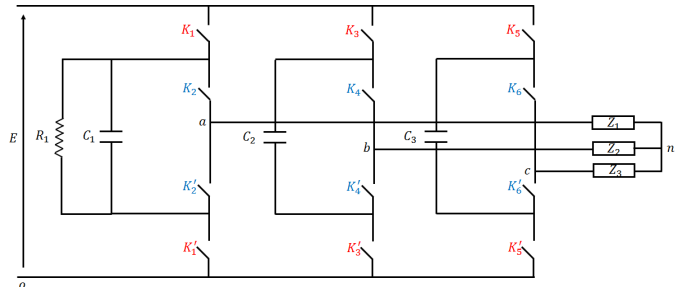


Fig. 4. Schéma d'onduleur FC triphasé à trois niveaux de tension suivi d'une perturbation au niveau de  $C_1$ .

Un schéma de MLI basé sur l'ensemble de solution est illustré dans la figure 5.

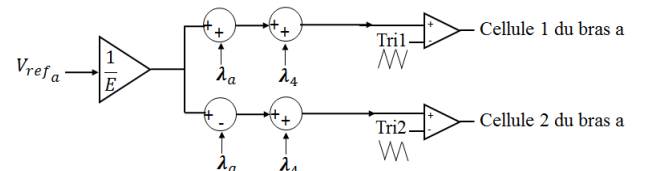


Fig. 5. Schéma MLI appliqué à la phase,  $a$ , de l'onduleur FC à trois niveaux.

Comme nous pouvons le voir sur le schéma 5, pour chaque bras d'onduleur contenant deux cellules de commutation (cas d'onduleur à trois niveaux), on compare le rapport cyclique à deux porteuses déphasées de  $\pi$ .

Les résultats de simulation pendant l'application de la perturbation et après l'application des degrés de liberté, sont présentés.

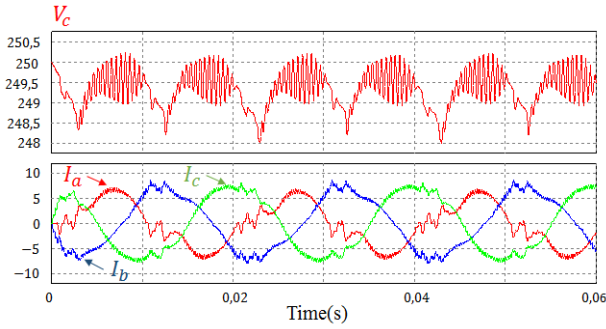


Fig. 6. Forme de la tension de capacité d'un seul bras d'onduleur et les courants de charge après l'application de la perturbation.

Le chronogramme de la figure 6 présente la tension aux bornes de la capacité du bras  $a$  et les courants de phase en présence de la perturbation, appliquée à tous les bras et lorsque aucune action correctrice n'est employée, soit  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

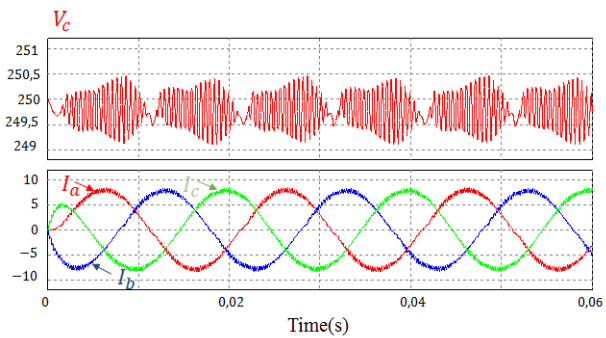


Fig. 7. Forme de la tension de capacité pour un seul bras et les courants de charge après l'ajout de  $\lambda_i$ .

La figure 7 présente l'allure de la tension de capacité d'un bras d'onduleur et les courants de phase lorsque les  $\lambda_i$  sont choisis selon la relation (44), soit  $\lambda_1 = \frac{3}{2} \frac{C_1}{T_c} \frac{\Delta U_{capa1}}{I_1}$  et  $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Nous précisons que dans tous les cas  $\lambda_4$  a été choisi pour maximiser la zone de linéarité de l'onduleur.

Afin de bien montrer la validité de la méthode utilisée en appliquant les degrés de liberté définis,  $\lambda_i$ , nous allons faire un calcul du THD des courants de charge et voir l'influence de ces degrés de liberté sur le comportement du système de l'onduleur et de la charge. La fréquence de découpage  $F_d = 10\text{kHz}$ .

Les résultats de simulation montrent que le THD, calculé par Scilab, est amélioré dans le cas d'utilisation des degrés de liberté. On appelle  $THD_1$  le taux de distorsion harmonique dans le cas d'application de la perturbation et  $THD_2$  le taux de distorsion harmonique dans le cas d'application de la correction ( $\lambda_i$ ). Dans cette configuration  $THD_1 = 1.3989641$  et le  $THD_2 = 1.0008388$ .

Afin de récapituler ce travail, nous allons faire un tableau récapitulatif concernant l'amélioration du THD :

Tableau 1. Tableau récapitulatif de l'étude.	
$F_d = 10\text{kHz}$	
Perturbation	$THD_1 = 1.3989641$
Correction	$THD_2 = 1.0008388$
Amélioration	29%

## Bilan

Dans cette approche, de nouveaux degrés de liberté ont été trouvés et l'objectif a été de savoir les lier à des critères qui peuvent ou devraient être optimisés.

Une fois que les degrés de liberté sont identifiés, nous avons opté pour une méthode de compensation de la tension aux bornes du condensateur qui subit une perturbation externe.

Le seul ajout de composants au schéma électrique concernerait les sondes de tension et de courant permettant la surveillance des tensions de capacité et des courants de charge.

L'application des degrés de liberté sur le schéma de MLI a comme conséquence, une amélioration des formes de la tension de capacité et des courants de charge. Le calcul du THD du courant montre qu'il existe une amélioration de 29% en appliquant la correction.

Une autre application de l'approche a été faite sur un autre type de convertisseur qui est l'onduleur MMC, qui sera détaillé dans la section suivante.

## 7. CONVERTISSEUR MODULAIRE MULTINIVEAUX

Le Convertisseur Modulaire Multiniveaux (MMC) est actuellement un sujet important de recherches et employé dans des applications de hautes tensions et très forte puissance (jusqu'à 1GW).

L'intérêt de cette structure est l'augmentation du nombre de degré de liberté lorsque le nombre de sous-modules mis en parallèle croît. Le degré de liberté correspond aux types de composants (calibres et nature) que l'on peut mettre en série. Cette structure a la particularité d'avoir une continuité de service même si un sous module est défaillant [1].

Nous présentons un bras d'onduleur à MMC à trois niveaux de tension dans la figure 8. Cette topologie implique que chaque bras contient 4 cellules de commutations qui sont complémentaires. Ces cellules élémentaires sont  $(K_1 K'_1)$ ,  $(K_2 K'_2)$ ,  $(K_3 K'_3)$  et  $(K_4 K'_4)$ . C'est à dire pour chaque demi bras on a  $(N - 1)$  cellules. Chaque cellule (composée d'un condensateur et d'une cellule de commutation bidirectionnelle) permet d'imposer entre ses deux points de connexion une tension, soit nulle, soit égale à la tension de son condensateur (ici  $\frac{E}{2}$ ).

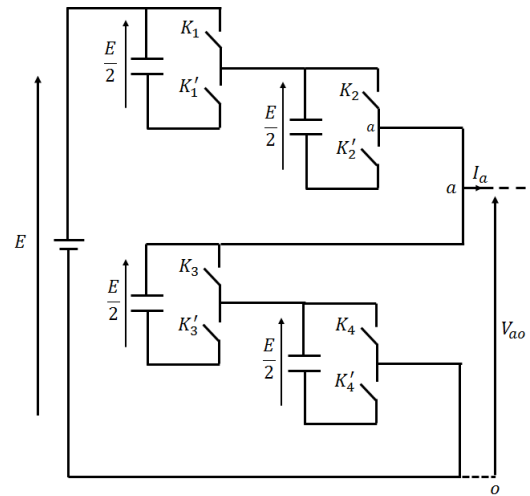


Fig. 8. Bras d'onduleur MMC à trois niveaux.

Cette structure est caractérisée par trois états possibles listés dans le tableau 2.

Tableau 2. Tableau des séquences de l'onduleur MMC.								
$K_1$	$K'_1$	$K_2$	$K'_2$	$K_3$	$K'_3$	$K_4$	$K'_4$	$V_{ao}$
1	0	1	0	0	1	0	1	$E$
1	0	0	1	1	0	0	1	$\frac{E}{2}$
0	1	0	1	0	1	0	0	0

Le tableau de séquences montrent bien que nous sommes dans le cas d'un onduleur à trois niveaux de tension. Pour différentes combinaisons des interrupteurs, la tension  $V_{ao} = \{E, \frac{E}{2}, 0\}$

Chaque cellule (composée d'un condensateur et d'une cellule de commutation bidirectionnelle) permet d'imposer entre ses deux points de connexion une tension, soit nulle, soit égale à la tension de son condensateur (ici  $\frac{E}{2}$ ).

L'allure de la tension de sortie de l'onduleur MMC est illustrée, figure 9. Définissons également les instants  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  comme étant les instants de passage de la tension  $V_{ao}$  d'un niveau à un autre.

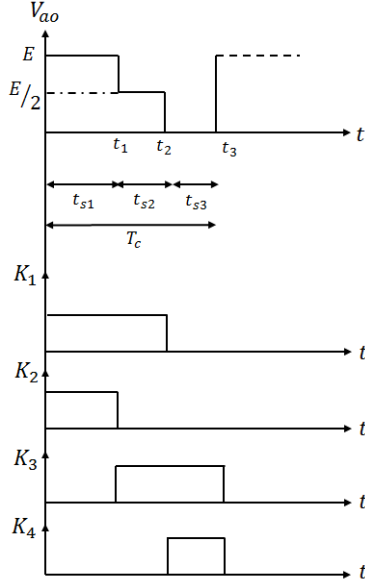


Fig. 9. Allure de la tension d'un bras d'onduleur MMC en fonction de l'état des interrupteurs.

Pour chaque niveau de tension, les intervalles de temps sont définis comme suit :

$$\begin{cases} t_{s1} = t_1 - 0 \\ t_{s2} = t_2 - t_1 \\ t_{s3} = t_3 - t_2 \end{cases} \quad (45)$$

A partir de la figure 9, l'expression de la valeur moyenne de la tension de bras est exprimée comme suit :

$$V_{ao} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} V_{ao}(t) dt = \frac{1}{T_c} \left[ \int_0^{t_1} E dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{E}{2} dt + \int_{t_2}^{t_3} 0 dt \right] \quad (46)$$

En prenant en compte que :

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{t_{s1}}{T_c} \\ \tau_2 = \frac{t_{s2}}{T_c} \\ \tau_3 = \frac{t_{s3}}{T_c} \end{cases}, \quad \text{et que} \quad \alpha_{i_{bras}} = \begin{bmatrix} \alpha_1^a \\ \alpha_2^a \\ \alpha_3^a \\ \alpha_4^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Dans le cas d'un onduleur du type MMC,  $\alpha_{i_{bras}}$  sont les rapports cycliques pour un seul bras et  $i_{bras} \in \{1, \dots, 4\}$ . La généralisation de l'expression des rapports cycliques de l'équation (47) à un système triphasé devient :

$$\alpha_{i_{3bras}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tau_{j_{3bras}} = B_{MMC} \tau_{j_{3bras}} \quad (48)$$

L'expression de la tension  $V_{ao}$  peut être mise sous forme matricielle comme suit :

$$V_{ao} = E \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

En faisant l'extension de l'expression (49) pour les trois bras de l'onduleur, l'expression  $V_{Io}$  pour les tensions de bras s'écrit :

$$V_{Io} = E \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \tau_{j_{3bras}}, \quad (50)$$

avec  $\tau_{j_{3bras}} = [\tau_1^a \ \tau_2^a \ \tau_3^a \ \tau_4^b \ \tau_5^b \ \tau_6^b \ \tau_7^c \ \tau_8^c \ \tau_9^c]^T$  sont les instants de commutation appliqués au bras  $a$ ,  $b$  et  $c$  respectivement.

Comme nous l'avons vu auparavant sur les différentes expressions du modèle triphasé, l'expression de la tension de ligne en fonction des instants de commutation s'écrit sous la forme :

$$V'_{ln} = \frac{E}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \tau_{j_{3bras}} \quad (51)$$

Prenons  $k_{MMC} = \frac{E}{3}$  et  $J_{MMC} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ .

Comme l'onduleur FC, l'onduleur à MMC admet aussi l'équation d'un système linéaire qui s'écrit sous la forme  $V'_{ln} = k_{MMC}(F \otimes J_{MMC}) \tau_{j_{3bras}}$ .

Afin d'exprimer l'ensemble des solutions des instants de commutation en fonction des tensions de référence, la résolution de l'équation du système linéaire décrite dans (51) est nécessaire et elle s'écrit de la manière suivante :

$$\tau_{j_{3bras}} = \frac{1}{k_{MMC}} (F \otimes J_{MMC})^\dagger V'_{ref} + (I_9 - (F \otimes J_{MMC})^\dagger (F \otimes J_{MMC})) z \quad (52)$$

Et comme il existe une relation liant les rapports cycliques aux instants de commutation, équation (48), alors en multipliant l'équation (52) par la matrice  $B_{MMC}$  nous pouvons exprimer l'expression des ensembles de solutions exprimant les rapports cycliques en fonction des tensions de référence telle que :

$$\alpha_{i_{3bras}} = \frac{1}{k_{MMC}} B_{MMC} (F \otimes J_{MMC})^\dagger V'_{ref} + B_{MMC} (I_9 - (F \otimes J_{MMC})^\dagger (F \otimes J_{MMC})) z \quad (53)$$

Qui peut être détaillée comme suit :

$$\alpha_{i_{3bras}} = \begin{bmatrix} \alpha_1^a \\ \alpha_2^a \\ \alpha_3^a \\ \alpha_4^a \\ \alpha_5^b \\ \alpha_6^b \\ \alpha_7^b \\ \alpha_8^b \\ \alpha_9^c \\ \alpha_{10}^c \\ \alpha_{11}^c \\ \alpha_{12}^c \end{bmatrix} \frac{1}{15k_{MMC}} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 6 \\ 0 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ -6 & -6 \\ -4 & -4 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V'_{ref} + \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ -4 & 13 & 15 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 3 & 9 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 7 & -4 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 13 & 15 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 6 & 3 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -4 & 13 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} z \quad (54)$$

$[\alpha_1^a \ \alpha_2^a \ \alpha_3^a \ \alpha_4^a]^T$  correspondent aux rapports cycliques appliqués au bras  $a$ .

$[\alpha_5^b \ \alpha_6^b \ \alpha_7^b \ \alpha_8^b]^T$  correspondent aux rapports cycliques appliqués au bras  $b$ .

$[\alpha_9^c \ \alpha_{10}^c \ \alpha_{11}^c \ \alpha_{12}^c]^T$  correspondent aux rapports cycliques appliqués au bras  $c$ .

Comme nous pouvons le constater, nous avons 12 rapports cycliques à définir pour les trois bras d'onduleur, et chaque bras contient 4 cellules de commutation et donc 4 rapports cycliques.

## 8. CONCLUSIONS

Ce travail présente une nouvelle approche mathématique pour la modulation de largeur d'impulsion, appliquée aux modèles des onduleurs multiniveaux et plus particulièrement aux onduleurs à capacités flottantes. Un modèle moyen est utilisé et combiné avec la théorie d'inverses généralisées. Une généralisation de l'approche a été faite sur l'architecture d'onduleur à capacités flottantes multiniveaux, que ce soit par la modulation MLI sinus en utilisant les rapports cycliques, ou la SVM en utilisant les instants de commutation. L'avantage d'utiliser les instants de commutation se situe dans le nombre élevé de degrés de liberté par rapport à l'utilisation des rapports cyclique. Cependant, la difficulté réside dans l'identification de ces degrés de liberté.

Après la résolution de l'équation linéaire dédiée à ce type d'onduleur et après l'utilisation de la factorisation du rang maximal, une identification des degrés de liberté à été faite. Nous avons choisi de lier ces degrés de liberté à la tension aux bornes de la capacité afin de tester la validité du modèle obtenu. Les résultats de simulation ont été satisfaisants et montrent l'efficacité de l'approche utilisée en améliorant le taux de distorsion harmoniques par l'application des degrés de liberté.

Il est également démontré qu'il existe des degrés de liberté qui peuvent être fixés afin d'améliorer certains critères.

Un autre type d'onduleur à été abordé dans cette étude, il s'agit de l'onduleur MMC. Il a été démontré que ce modèle d'onduleur admet aussi une équation d'un système linéaire exprimant la tension en fonction des rapports cycliques dans le cas d'une MLI sinusoïdale et en fonction des instants de commutation dans le cas d'une MLI vectorielle (SVM). La résolution de son système linéaire, en utilisant la notion d'inverses généralisées, permet d'obtenir les ensembles de solutions en exprimant

les instants de commutation en fonction des tensions de référence d'une manière directe. Grâce à la relation liant les instants de commutation aux rapports cycliques, nous avons pu exprimer l'ensemble des solutions des rapports cycliques en fonction des tensions de référence. La généralisation de l'approche mathématique à  $N$  niveaux de tension pour ce type d'onduleur est à envisager pour les travaux futurs.

## 9. RÉFÉRENCES

- [1] A. Leredde, *Etude, commande et mise en oeuvre de nouvelles structure multiniveaux*. PhD thesis, Université de Toulouse, 2011.
- [2] P. Vidal, S. Cailhol, F. Rotella, K. Berkoune, A. Lior, and M. Fadel, "Generalized inverses applied to pulsewidth modulation for static conversion : a first study," *EPE*, vol. 10, 2013.
- [3] S. Capitaneanu, *Optimisation de la fonction MLI dun onduleur de tension deux-niveaux*. PhD thesis, INPT, 2002.
- [4] M. Davio, "Kronecker products and shuffle algebra," *Computers, IEEE Transactions on*, vol. C-30, pp. 116–125, Feb 1981.
- [5] F. Charles and L. Van, "The ubiquitous kronecker product," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000.
- [6] H. Zhang and F. Ding, "On the kronecker products and their applications," *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2013, p. 8, June 2013.
- [7] M. Sage, *Algèbre multilinéaire*.
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/Moore-Penrose\\_pseudoinverse](https://en.wikipedia.org/wiki/Moore-Penrose_pseudoinverse). page visitée le 11/03/2016.
- [9] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*. Acta Math, 1903.
- [10] J. Z. Hearon, "Generalized inverses and solutions of linear systems," *Journal of research of the National Bureau of Standards - B. Mathematical Sciences*, vol. 72B, p. 4, 1968.
- [11] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, *Generalized Inverses : Theory and Applications*. Springer-Verlag, 2003.
- [12] F. Rotella and P. Borne, *Théorie et pratique du calcul matriciel*. 1995.
- [13] C. R. Rao and S. K. Mitra, *Generalized Inverse of matrices and Its applications*. Wiley, 1971.
- [14] E. H. Moore, "On the reciprocal of the general matrix," *Proc. Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 26, pp. 394–395, 1920.
- [15] A. Ben-Israel, "The moore of the moore-penrose inverse," *Proc. Electron. Jour. Lin. Algebra.*, vol. 9, pp. 150–157, 2002.
- [16] R. Penrose, "A generalized inverse for matrices," *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 51, pp. 406–413, 1955.
- [17] S. L. Campbell and C. D. Meyer, *Generalized inverse of linear transformations*. Pitman, 1979.
- [18] J. Brewer, "Kronecker products and matrix calculus in system theory," *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 25, pp. 772–781, Sep 1978.
- [19] K. Berkoune, P. Vidal, and F. Rotella, "New pulse width modulation approach and model applied tto multilevel inverters," *ELECTRIMACS*, p. 7, 2014.
- [20] F. Costa, *Les onduleurs de tension en commutation commandée*.