

Couplage direct de la solution analytique des équations de Maxwell avec les réseaux de reluctances

Mouheb DHIFLI, Yanis LAOUBI, Guillaume VEREZ, Yacine AMARA, Georges BARAKAT
GREAH, EA3220, Université du Havre, France

RESUME - Le but de cette communication est de décrire une approche mathématique permettant un couplage direct entre la solution analytique des équations de Maxwell en magnétostatique et les réseaux de reluctances. Cette modélisation analytique hybride permettra de tenir compte de la saturation magnétique et de rendre les modèles semi-analytiques plus génériques en contribuant à la résolution du problème de la modélisation de l'entrefer. Le modèle analytique est établi dans l'entrefer, et les réseaux de reluctances sont utilisés pour modéliser les parties restantes. La pertinence de l'approche proposée est démontrée en comparant des résultats issus de ce modèle hybride à ceux issus de la méthode des éléments finis.

Mots-clés— Modélisation analytique, réseaux de reluctances, circuits magnétiques équivalents, couplage direct, saturation magnétique, perméance d'entrefer.

1. INTRODUCTION

Généralement, la modélisation précise des machines électriques nécessite l'utilisation de la méthode des éléments finis. Cependant, la méthode des éléments finis est grande consommatrice de taille mémoire et de temps de calcul. Ceci est plus particulièrement vrai pour les ingénieurs travaillant dans des domaines industriels, qui font face à des marchés hautement concurrentiels.

Pour réduire la durée de l'étape de pré-dimensionnement, des modèles analytiques et semi-analytiques sont généralement préférés à la méthode des éléments finis. Deux approches sont le plus souvent utilisées : les circuits reluctants, et les modèles analytiques basés sur la résolution formelle des équations de Maxwell. Cependant, les modèles basés sur les circuits reluctants (modèles semi-numériques ou semi-analytiques) ne sont pas aussi génériques que les modèles basés sur la méthode des éléments finis. Les modèles analytiques pourraient répondre au problème de la généralité pour une structure donnée, mais sont basés sur des hypothèses négligeant la saturation magnétique des parties ferromagnétiques.

Dans cette communication, nous nous proposons de décrire un formalisme mathématique permettant un couplage direct entre la solution analytique des équations de Maxwell en magnétostatique et les réseaux de reluctances. Cette hybridation de modèles permet, d'un côté, de lever l'hypothèse de linéarité frappant les modèles analytiques issus de la résolution formelle des équations de Maxwell et, de l'autre, de contribuer à la généralité du modèle par réseaux reluctants en

résolvant le problème de modélisation de l'entrefer où les perméances sont très délicates à déterminer.

Ce type de modèle hybride permettant de tenir compte de la saturation magnétique relativement localisée n'a été que rarement abordé. Deux approches sont présentées dans la littérature scientifique : couplage du modèle analytique avec la méthode des éléments finis [1], et couplage du modèle analytique avec la méthode des circuits reluctants [2]. Pour les deux articles cités précédemment, les auteurs utilisent la solution analytique pour modéliser l'entrefer et l'autre méthode (éléments finis ou circuits de reluctances) pour modéliser les autres parties de la machine électrique. C'est la seconde approche que nous avons adopté pour améliorer le compromis entre temps de calcul et précision.

Alors que les auteurs, dans la référence [2], utilisent la solution analytique en potentiel vecteur, c'est la solution analytique en potentiel scalaire qui est utilisée dans l'approche présentée ici. Par ailleurs, le formalisme de couplage n'est détaillé ni dans la référence [2], ni dans d'autres articles connexes publiés par les mêmes auteurs. A l'inverse, le formalisme mathématique permettant le couplage direct des deux approches de modélisation sera relativement détaillé, pour permettre à tout un chacun de le reproduire. De plus, il faut noter que les références citées précédemment sont de langue anglaise, et cette communication permettra de combler un vide de la littérature scientifique de langue française.

Afin de valider l'approche proposée, une structure électromagnétique simple sera modélisée à l'aide du modèle hybride et de la méthode des éléments finis. La validation du modèle hybride sera réalisée en comparant les résultats obtenus avec ceux issus de simulations par éléments finis. Cette comparaison couvrira l'analyse des grandeurs locales et globales.

2. STRUCTURE ETUDIEE ET MODELISATION PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS

Pour illustrer en détail l'approche de modélisation proposée, elle a été appliquée à une structure relativement simple. La figure 1 présente un motif élémentaire de cette structure. Il s'agit d'une structure linéaire de longueur infinie dans le sens du mouvement (x), ainsi que dans le sens transverse (z). Il est alors possible de modéliser la machine en utilisant des modèles bidimensionnels (2D, (x, y)).

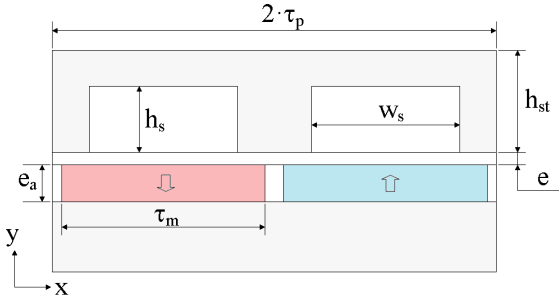


Fig.1 Structure étudiée

2.1. Structure étudiée

Pour alléger la modélisation et se concentrer sur le formalisme mathématique, on suppose que le circuit magnétique de l'armature mobile portant les aimants permanents est très perméable. Le tableau 1 donne les principales caractéristiques géométriques et magnétiques de la structure. La figure 1 présente un motif élémentaire, pour lequel des conditions de cyclicité s'appliquent à $x = 0$ m et $x = 2 \cdot \tau_p$ (τ_p est le pas polaire).

2.2. Modélisation par la méthode des éléments finis

La structure étudiée est d'abord modélisée à l'aide du logiciel Flux2D. Les figures 2(a) et 2(b) présentent respectivement les conditions aux limites appliquées au domaine d'étude, et les iso-valeurs du module de l'induction et les lignes de champ. La condition champ tangent est appliquée à $y = e_a + e + h_{st}$ (flux nul).

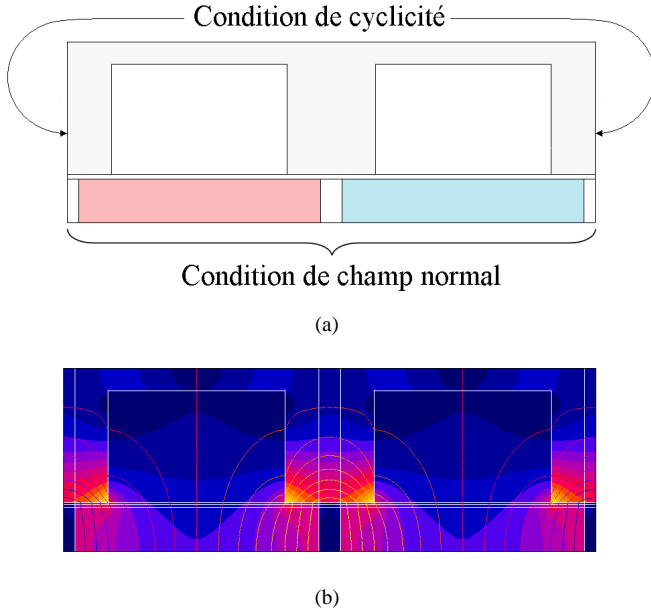


Fig. 2. Modélisation par la méthode des éléments finis de la structure étudiée

Tableau 1. Principales dimensions et caractéristiques de la structure.

e (mm)	1	τ_m (mm)	55
e_a (mm)	10	τ_p (mm)	60
h_s (mm)	25	w_s (mm)	40
h_{st} (mm)	30	B_r (T)	1.2

3. MODELE HYBRIDE

Le modèle hybride (MH) est obtenu par le couplage direct du modèle analytique (MA) et le circuit de reluctances (CR). Nous décrivons dans ce qui suit le formalisme mathématique permettant ce couplage. La figure 3 illustre ce couplage.

3.1. Modèle analytique

Le potentiel scalaire U dans la région des aimants permanents (régions I, $y \in [0, e_a]$) et celle de l'entrefer mécanique (régions II, $y \in [e_a, e_a + e]$) est régie par l'équation suivante

$$\begin{cases} \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \nabla \cdot \mathbf{M}, & \text{Pour la région I} \\ \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, & \text{Pour la région II} \end{cases} \quad (1)$$

où \mathbf{M} est le vecteur magnétisation, dont les composantes peuvent être exprimées, dans le repère Cartésien, comme suit

$$\begin{cases} M_x = \sum_{n=1}^{+\infty} (M_{x1n} \sin(n\pi x/\tau_p) + M_{x2n} \cos(n\pi x/\tau_p)) \\ M_y = \sum_{n=1}^{+\infty} (M_{y1n} \sin(n\pi x/\tau_p) + M_{y2n} \cos(n\pi x/\tau_p)) \end{cases} \quad (2)$$

Les vecteurs \mathbf{B} et \mathbf{H} sont liés par

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), & \text{Pour la région I} \\ \mu_0 \mathbf{H}, & \text{Pour la région II} \end{cases} \quad (3)$$

Le vecteur champ magnétique \mathbf{H} est donné par

$$\mathbf{H} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \hat{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \hat{e}_y \quad (4)$$

Pour la structure étudiée, les aimants permanents sont magnétisés selon la direction y , le potentiel magnétique scalaire U , dans les régions I et II, est alors régie par l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad (5)$$

La solution générale de cette équation peut être exprimée pour une région i par

$$U^{(i)}(x, y) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)}x + a_2^{(i)}y + a_3^{(i)}xy + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\begin{aligned} & \left(a_{4n}^{(i)} \sinh(n\pi y/\tau_p) \right) \sin(n\pi x/\tau_p) \\ & + \left(a_{5n}^{(i)} \cosh(n\pi y/\tau_p) \right) \sin(n\pi x/\tau_p) \\ & + \left(a_{6n}^{(i)} \sinh(n\pi y/\tau_p) \right) \cos(n\pi x/\tau_p) \\ & + \left(a_{7n}^{(i)} \cosh(n\pi y/\tau_p) \right) \cos(n\pi x/\tau_p) \end{aligned} \right] \quad (6)$$

Considérant les symétries géométriques et la périodicité électromagnétique de la structure étudiée, il est facile de montrer que $a_1^{(i)} = a_2^{(i)} = 0$ et $a_3^{(i)} = 0$, pour les deux régions. $a_0^{(i)}$ est une constante arbitraire qui peut être choisie nulle.

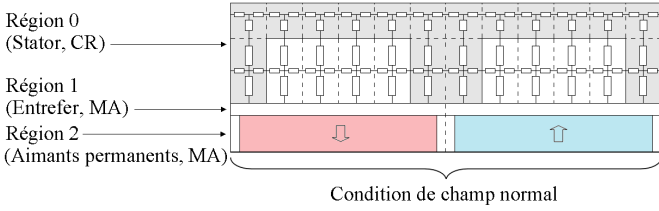


Fig. 3. Illustration du modèle hybride

Les expressions du potentiel vecteur sont plus amplement développées dans les sections suivantes.

3.1.1. Région des aimants permanents (Région I)

Puisque l'armature mobile est supposée avoir une perméabilité relative infinie, le champ magnétique à la frontière entre la région des aimants et l'armature les supportant ($y = 0$), doit satisfaire la relation suivante

$$H_x^I = 0 \quad (7)$$

En imposant cette condition, le potentiel scalaire magnétique dans cette région aura l'expression suivante

$$U^I(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_{4n}^I \sinh(n\pi y/\tau_p) \sin(n\pi x/\tau_p) + a_{6n}^I \sinh(n\pi y/\tau_p) \cos(n\pi x/\tau_p) \right] \quad (8)$$

3.1.2. Région de l'entrefer mécanique (Région II)

A l'interface entre les régions I et II ($y = e_a$), les conditions de passage imposent

$$\begin{cases} H_x^II = H_x^I \\ B_y^II = B_y^I \end{cases}, \quad (9)$$

ce qui mène à

$$\begin{cases} a_{4n}^{II} = a_{4n}^I - (\tau_p/n\pi) M_{y1n} \cosh(n\pi e_a/\tau_p) \\ a_{5n}^{II} = (\tau_p/n\pi) M_{y1n} \sinh(n\pi e_a/\tau_p) \\ a_{6n}^{II} = a_{6n}^I - (\tau_p/n\pi) M_{y2n} \cosh(n\pi e_a/\tau_p) \\ a_{7n}^{II} = (\tau_p/n\pi) M_{y2n} \sinh(n\pi e_a/\tau_p) \end{cases} \quad (10)$$

3.1.3. Prise en compte du mouvement

La prise en compte du mouvement est réalisée en considérant la variation des coefficients M_{y1n} et M_{y2n} par rapport au déplacement x_d . Dans l'équation (2), les composantes du vecteur magnétisation sont définies par rapport à un référentiel lié au stator. Les coefficients M_{y1n} et M_{y2n} sont alors dépendant de la position x_d de l'armature mobile. L'équation suivante donne l'expression de la composante M_y dans un repère lié à l'armature mobile

$$M_y = \sum_{n=1}^{+\infty} M_{1n} \sin(n\pi x_r/\tau_p) \quad (11)$$

où x_r est la position définie par rapport au repère mobile. Elle est liée à la position absolue, définie par rapport au repère fixe,

par l'équation suivante

$$x_r = x - x_d \quad (12)$$

Les coefficients M_{y1n} et M_{y2n} sont calculés à partir des équations (2), (11), et (12).

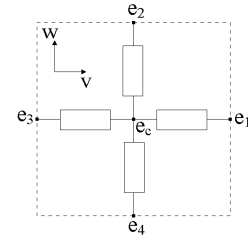
3.2. Circuits de réductances obtenue par maillage du domaine d'étude

Il faut noter que différents termes sont utilisés pour qualifier ce type de modèles : circuits magnétiques équivalents, circuits ou réseaux de réductances ou de perméances (RR ou RP). Le terme réseaux de perméances sera utilisé dans le reste de la contribution.

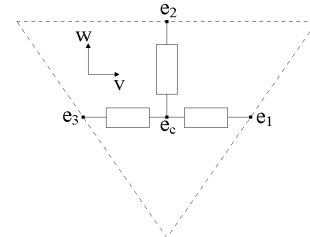
De plus, selon le mode de construction du réseau de perméances, deux approches existent :

- 1) RP experts;
- 2) RP obtenus par maillage du domaine d'étude.

Les RP experts sont construits en se basant sur une pré-connaissance des trajets de flux (tubes de flux) dans les structures modélisées. La prise en compte du mouvement, dans ce type d'approche, nécessite une adaptation du réseau [3]. Il est souvent nécessaire d'effectuer des calculs par la méthode des éléments finis pour la construction du réseau. Il s'ensuit que ce type d'approche souffre d'un manque de généricité, ce qui limite son usage dans des démarches de dimensionnement optimal. Pour remédier à ce problème certains auteurs ont proposé de générer le réseau de perméances à partir d'un maillage du domaine d'étude [4 – 6]. Cette approche a été utilisée pour modéliser le stator. Même si cette approche semble relativement ancienne, et qu'elle donne de bons résultats, elle n'est cependant pas très répandue. Comme la méthode des éléments finis, cette approche consiste à mailler le domaine d'étude avec des éléments de réductance (perméances). La figure 4 montre des exemples d'éléments de réductances qui peuvent être utilisés pour des problèmes 2D.



(a) élément rectangulaire



(b) élément triangulaire

Fig. 4. Exemples d'éléments de réductances pour des problèmes 2D.

La méthode nodale est utilisée pour générer le système d'équations à partir du RP. Les inconnus du système d'équations sont les potentiels scalaires aux nœuds. Le système d'équations, correspondant au RP, peut être mis sous forme matricielle comme suit

$$[P] \cdot [U] = [\Phi] \quad (13)$$

où, $[P]$ $[n \times n]$ est la matrice des perméances, $[U]$ $[n \times 1]$ est le vecteur des inconnus (les potentiels aux nœuds), et $[\Phi]$ $[n \times 1]$ est le vecteur des flux sources. n est le nombre de nœuds.

La figure 5 illustre comment les éléments de $[P]$ et $[\Phi]$, correspondant aux nœuds ne se trouvant pas à la frontière entre l'entrefer et le stator sont déterminés à partir des lois de Kirchhoff.

Selon les lois de Kirchhoff, il est possible d'écrire

$$\begin{cases} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi_{ij} = 0 \text{ Wb} \\ U_i - U_j = -\frac{\Phi_{ij}}{P_{ij}} \end{cases} \quad (14)$$

et par suite,

$$\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} \right) U_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (-P_{ij}) U_j = 0 \quad (15)$$

Les éléments de $[P]$ et $[\Phi]$ sont directement déterminés à partir de l'équation (15). Pour les nœuds non connectés au nœud i , les valeurs de P_{ij} sont nulles.

Les équations impliquant les potentiels aux nœuds se trouvant à l'interface entre l'entrefer et le stator permettent de finaliser le système d'équations permettant le couplage direct entre le modèle analytique MA et le RP.

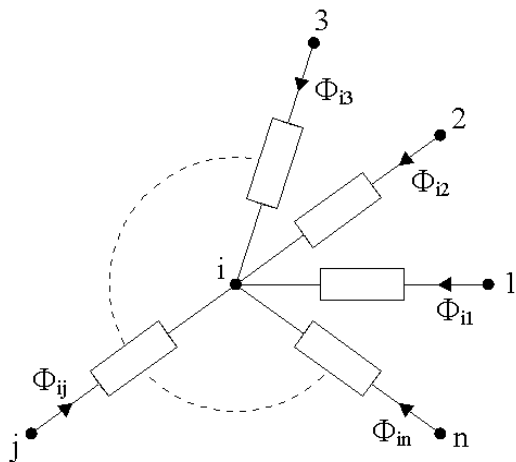


Fig. 5. Nœud i du réseau de perméances (RP).

3.3. Couplage direct (couplage fort)

Le couplage entre les deux modèles est obtenu en égalisant les potentiels scalaires magnétiques à $y = e_a + e$ (16) (continuité de la composante tangentielle du champ magnétique), et en calculant les flux entrant aux nœuds se trouvant à l'interface (Fig. 6) en utilisant la composante y de l'induction calculée à partir de la solution analytique (17) (continuité de la composante normale de l'induction). Les nœuds se trouvant à l'interface ne sont connectés qu'à un seul nœud (Fig. 6).

$$U^{\text{RN}}(x, y = e_a) = U^{\text{RN}}(x) \quad (16)$$

$$P_{ij}(U_i - U_j) = -\mu_0 l_a \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{\partial U^{\text{RN}}}{\partial y} \Big|_{y=e_a+e} dx \quad (17)$$

$U^{\text{RN}}(x)$ dans (16) est l'expression en séries de Fourier obtenue à partir des valeurs discrètes des potentiels scalaires magnétiques des nœuds de l'interface (Fig. 6). l_a dans (17) correspond à la longueur active de la machine.

L'équation (16) permet d'établir $2 \times N_h$ équations correspondant au nombre d'inconnus a_{4n}^1 and a_{6n}^1 , N_h étant le nombre d'harmoniques de la solution analytique. L'équation (17) permet d'établir m équation correspondant au nombre de nœuds à l'interface entre l'entrefer (MA) et le stator (RP). L'équation (15) permet d'établir les $(n-m)$ équations restantes. Le système d'équation ainsi obtenu peut être résolu de manière itérative pour tenir compte de la saturation magnétique.

Cette approche est utilisée dans la section suivante pour étudier la structure présentée à la section 2.

4. VALIDATION DU MODÈLE HYBRIDE

Afin d'évaluer les capacités du nouveau modèle (MH), les grandeurs locales et globales sont toutes deux analysées en utilisant les deux techniques (FE et MH). La figure 7 compare les composantes de l'induction obtenues par les deux approches, en fonction de x , pour une position de déplacement donnée. Comme on le voit, il existe une bonne concordance entre les deux méthodes.

La figure 8 compare les formes d'ondes de la force de détente. Comme nous pouvons le voir, les deux approches donnent des résultats relativement proches. La force de détente est calculée par la méthode du tenseur de Maxwell (18).

$$F_x = \frac{1}{\mu_0} \int_0^{2\tau_p} B_y^{\text{RN}}(x, h_m) B_x^{\text{RN}}(x, h_m) dx \quad (18)$$

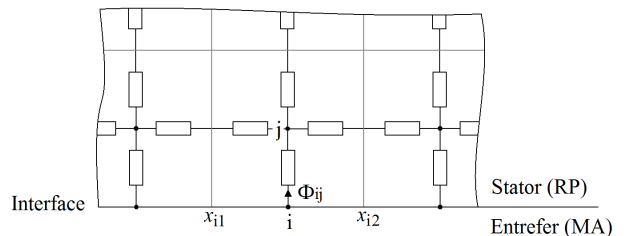


Fig. 6. Illustration du couplage direct.

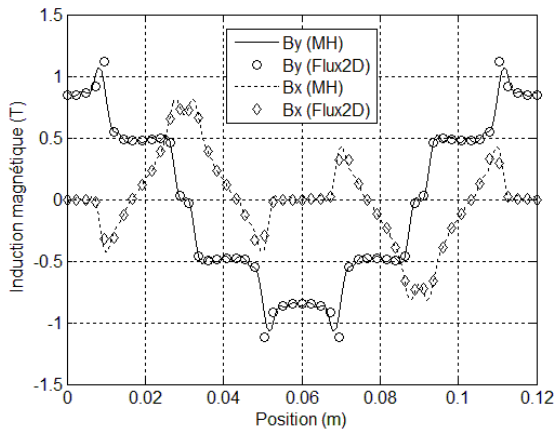


Fig. 7. Comparaison des composantes de l'induction.

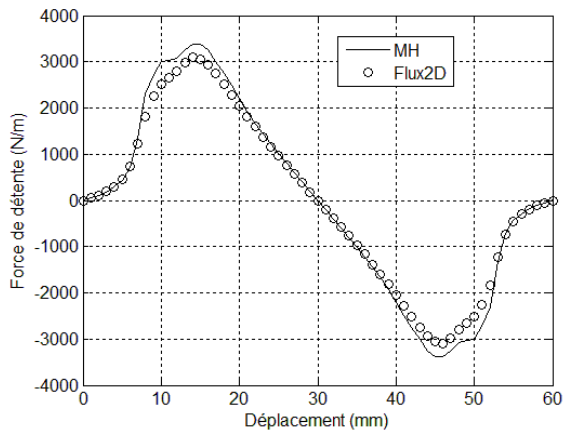


Fig. 8. Comparaison de la force de détente.

Les résultats du modèle hybrides sont obtenus en considérant 70 harmoniques pour la solution analytique et 1260 nœuds pour le circuit de reluctances. Le modèle basé sur la méthode des éléments finis contient 24846 nœuds, avec des éléments du second ordre. Concernant la prise en compte de la courbe $B(H)$ du matériau ferromagnétique, nous avons utilisé la même expression analytique de B en fonction de H pour les deux méthodes de calcul (Flux2D et modèle hybride).

5. CONCLUSIONS

Cette nouvelle approche permet d'allier les avantages des modèles analytiques et des circuits de reluctances, à savoir : la généralité, la prise en compte de la saturation magnétique. On peut conclure que la nouvelle approche constitue une alternative intéressante, par rapport à la méthode des éléments finis, pour le pré-dimensionnement (étapes préliminaires de dimensionnement) de machines électriques.

6. REMERCIEMENTS

Les travaux, présentés ici, ont été, en partie, réalisés dans le cadre d'un projet interne financé par le GDR SEEDS. Les auteurs tiennent à remercier le GDR SEEDS pour le financement du projet interne "Couplages Forts de Modèles Analytiques et Semi-Analytiques pour le Pré-Dimensionnement des Machines Électriques".

7. REFERENCES

- [1] A. A. Abdel-Razek, J. L. Coulomb, M. Feliachi and J. C. Sabonadière, "The calculation of electromagnetic torque in saturated electric machines with combined numerical and analytical solution of the field equations," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 17, no. 6, pp. 3250-3252, November 1981.
- [2] H. Gholizad, M. Mirsalim, M. Mirzayee, "Dynamic analysis of highly saturated switched reluctance motors using coupled magnetic equivalent circuit and the analytical solution," in Proceedings of CEM 2006, International Conference on Computational Electromagnetics, Aachen, Germany, VDE, April, 2006, pp. 1-2.
- [3] Z. Q. Zhu, Y. Pang, D. Howe, S. Iwasaki, R. Deodhar, and A. Pride, "Analysis of electromagnetic performance of flux-switching permanent-magnet machines by nonlinear adaptive lumped parameter magnetic circuit model," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 41, no. 11, pp. 4277-4287, November 2005.
- [4] J. Sykulski, *Computational magnetics*, James & James (Science Publishers) Ltd and Chapman & Hall, 1995.
- [5] J. Perho, *Reluctance network for analysing induction machines*, Acta Polytechnica Scandinavica, Electrical Engineering Series, no. 110, Espoo 2002, Finnish Academies of Technology.
- [6] B. Nedjar, *Modélisation basée sur la méthode des réseaux de perméances en vue de l'optimisation de machines synchrones à simple et à double excitation*. Thèse de Doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Décembre 2011..