

# Effet dynamo dans des géométries cylindriques

Caroline Nore<sup>1</sup>, Jean-Luc Guermond<sup>1,2</sup>, Jacques Léorat<sup>3</sup> & Francky Luddens<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LIMSI, CNRS, UPR3251, BP 133, 91403 Orsay cedex, France et Université Paris-Sud, France.

<sup>2</sup>Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, TX 77843-3368, USA.

<sup>3</sup>Luth, Observatoire de Paris-Meudon, place Janssen, 92195-Meudon, France.

**RÉSUMÉ** – Nous étudions la génération d'un champ magnétique par un écoulement de fluide conducteur de l'électricité (appelée effet dynamo) à l'aide de simulations numériques directes. Nous développons depuis 2002 un code dénommé SFEMaNS [1] capable de simuler les équations non linéaires de la magnétohydrodynamique (MHD) dans des milieux hétérogènes (avec des sauts de conductivité électrique ou de perméabilité magnétique) à frontières axisymétriques. Nous présentons dans cet article deux cas d'effet dynamo obtenus dans des conteneurs cylindriques : le premier est en relation directe avec une expérience en cours de montage à Dresden, Allemagne, qui projette de générer un effet dynamo dans une cuve cylindrique contenant 7 tonnes de sodium liquide en mouvement de rotation et précession [2] ; le second cas est à rapprocher de l'expérience von Kármán Sodium (VKS) qui a mis en évidence un champ magnétique stationnaire ou intermittent [3].

**Mots-clés** – Magnétohydrodynamique, effet dynamo, simulation numérique directe, saut de conductivité électrique ou de perméabilité magnétique.

## 1. DYNAMO EN PRÉCESSION

### 1.1. Motivation

Nous nous intéressons à un cas de dynamo fluide homogène, et plus particulièrement à la possibilité d'engendrer un effet dynamo à partir d'un fluide contenu dans une cuve en précession. Le cadre général est le suivant : on considère une cuve présentant une symétrie cylindrique (par ex. un cylindre, une sphère, un sphéroïde, etc). Cette cuve est remplie par un fluide conducteur de l'électricité. L'axe de symétrie de la cuve est mis en précession autour d'un axe dirigé selon un vecteur unitaire  $\mathbf{e}_p$  dans le référentiel du laboratoire. En outre, on suppose que la cuve tourne autour de son axe de symétrie (dirigé par  $\mathbf{e}_z$ ). La cuve est entourée de vide, et nous négligeons les effets éventuels liés à l'épaisseur de la cuve. On se place dans le référentiel en précession, i.e. dans un référentiel pour lequel le seul mouvement de la cuve est la rotation autour de son axe de symétrie. Ainsi, les équations de Navier-Stokes font intervenir la force de Coriolis et le système général s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\varepsilon \mathbf{e}_p \times \mathbf{u} + \nabla p &= \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{h}) \times \mu_r \mathbf{h}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t (\mu_r \mathbf{h}) - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mu_r \mathbf{h}) &= -\frac{1}{Rm} \nabla \times \left( \frac{1}{\sigma_r} \times \nabla \times \mathbf{h} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{h} &= 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $p$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $Re = \mathcal{U}\mathcal{L}/\nu$ ,  $Rm = \sigma_0 \mu_0 \mathcal{U}\mathcal{L}$  et  $\varepsilon$  sont respectivement la vitesse, la pression totale, le champ magnétique, le nombre de Reynolds cinétique, le nombre de Reynolds magnétique et le taux de précession, i.e. le rapport entre la vitesse an-

gulaire de la précession autour de  $\mathbf{e}_p$  et la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe de symétrie.  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{L}$  sont les vitesse et longueur caractéristiques,  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide,  $\sigma_0$  la conductivité électrique du fluide ( $\sigma_r$  la conductivité relative des matériaux, ici prise égale à 1) et  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide ( $\mu_r$  la perméabilité relative des matériaux, ici prise égale à 1). On se restreint ici au cas  $\varepsilon = 0.15$  et à un cylindre de hauteur égale à son diamètre, et on considère que les axes de précession et de rotation sont orthogonaux.

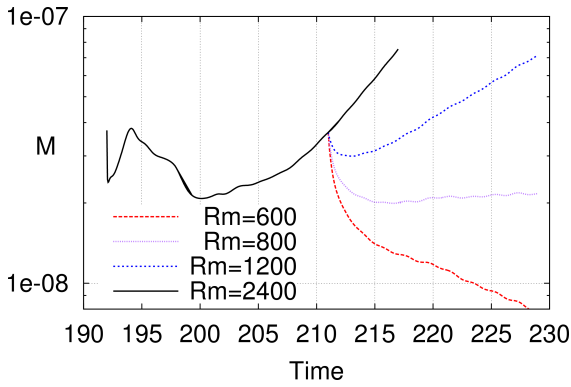
### 1.2. Régime hydrodynamique

Dans un premier temps, on se focalise sur les équations de Navier-Stokes uniquement. Le forçage provient du mouvement imposé à la cuve, i.e. on prend,  $\mathbf{h} = 0$  dans l'équation (1.1), et on impose que le champ de vitesses sur le bord corresponde à la rotation de la cuve. En faisant varier le nombre de Reynolds  $Re$ , on observe un comportement similaire à celui décrit dans des cavités sphériques en précession : à bas nombre de Reynolds, le champ de vitesses est stationnaire et centrosymétrique (i.e.  $\mathbf{u}(-\mathbf{x}) = -\mathbf{u}(\mathbf{x})$ ). Lorsqu'on augmente le nombre de Reynolds, le flot perd à la fois son caractère symétrique et stationnaire. L'énergie cinétique est transférée de façon cyclique entre la moitié supérieure et la moitié inférieure du cylindre. S'inspirant de [4], on s'attend à ce que la dynamo soit facilitée par un écoulement asymétrique instationnaire, c'est pourquoi on utilise par la suite  $Re = 1200$ .

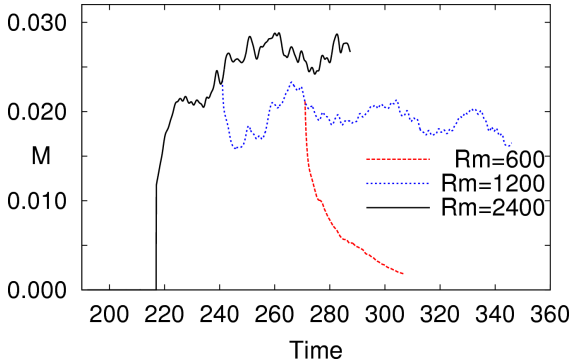
### 1.3. Dynamo

Afin de déterminer des valeurs de  $Rm$  susceptibles de générer une dynamo, on commence par effectuer des calculs de dynamo cinématique. Comme le champ de vitesses calculé pour  $Re = 1200$  est instationnaire, on intègre les équations de la MHD sans la force de Laplace ( $\mathbf{h} = 0$  dans l'équation (1.1)) en faisant varier le nombre de Reynolds magnétique. On trouve alors un seuil de dynamo  $Rm^c \simeq 750$  (voir figure 1(a)). Des calculs non linéaires ont ensuite été effectués, pour différents nombres de Reynolds magnétiques, variant de 600 à 2400, et ont permis de prouver qu'une dynamo pouvait être générée par un cylindre en précession [5] (voir figure 1(b)).

Le champ magnétique généré est de forme quadrupolaire comme le montre la figure 2(b). Enfin, il est bon de souligner que, en admettant que le seuil est fixé par la valeur de  $Rm^c$  et pas par la valeur de nombre de Prandtl  $Pm = \frac{Rm}{Re}$ , les valeurs de paramètres permettant l'effet dynamo semblent atteignables expérimentalement, et nous espérons pouvoir bientôt comparer ces simulations numériques à l'expérience DRESDYN, actuellement en cours de montage en Allemagne [2].



(a) Régime de dynamo cinématique



(b) Régime de dynamo non linéaire

Fig. 1. Evolution temporelle de l'énergie magnétique  $M$  dans le fluide conducteur (a) dans le régime de dynamo cinématique de  $t = 192$  à  $Re = 1200$  et pour différents  $Rm$  (en échelle lin-log) et (b) dans le régime de dynamo non linéaire à  $Re = 1200$  et  $Rm = 2400$ ,  $Rm = 1200$ ,  $Rm = 600$ .

## 2. DYNAMO DANS UNE CONFIGURATION DE TYPE VKS

### 2.1. Motivation

Nous nous intéressons à l'expérience de von Kármán Sodium [3] (VKS) située à Cadarache qui, en septembre 2006, a démontré un effet dynamo au-delà d'un nombre de Reynolds magnétique critique  $Rm^c \approx 32$ . Le schéma de l'expérience est montré en figure 3(a). La cavité cylindrique interne, composée de cuivre, est remplie de sodium liquide mis en mouvement par deux turbines contra-rotatives situées en haut et en bas. Elle est entourée par une autre cavité cylindrique contenant du sodium liquide immobile et dont les parois en cuivre contiennent le système de régulation de la température. L'écoulement généré est du type von Kármán avec deux cellules de vitesse toroidales et poloidales. Le champ de vitesse moyenné en temps et axisymétrisé a été mesuré sur une maquette en eau par l'équipe de Saclay. Il est représenté par ses composantes en coordonnées cylindriques sur la figure 3(c). L'effet dynamo est observé uniquement avec des turbines en fer doux et pas avec des turbines en acier. Le champ magnétique qui croît et sature au delà du seuil est à composante axisymétrique, ce qui prouve l'action des composantes non axisymétriques du champ de vitesse. Nous avons donc développé un nouvel algorithme présenté dans [1] afin de calculer des champs magnétiques avec sauts de perméabilité magnétique. Nous décrivons dans la suite les résultats de dynamo cinématique, i.e. nous intégrons seulement l'équation (1.3) avec le champ de vitesses stationnaire et axisymétrique fourni par l'expérience avec des sauts de  $\mu_r$ .

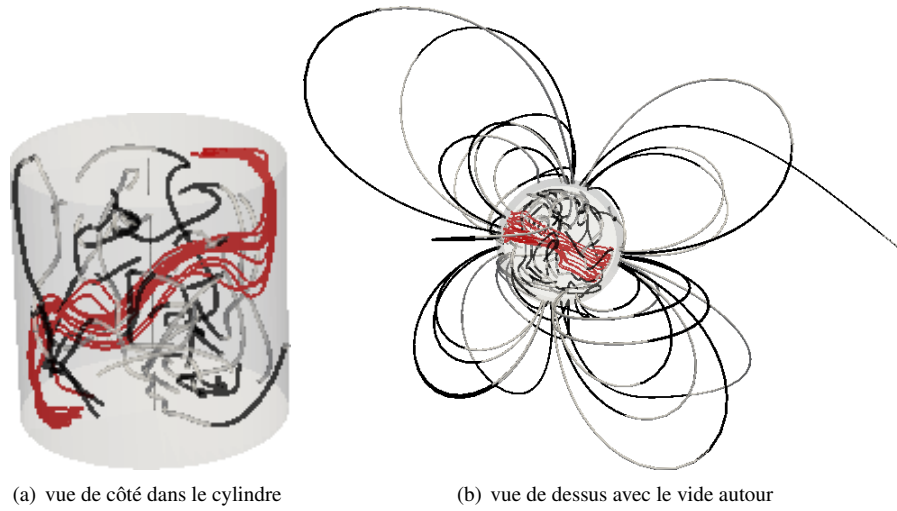


Fig. 2. Vue instantanée à  $t = 241$  pour  $Re = 1200$ ,  $Rm = 2400$  montrant des lignes de vortacité (rouge) et des lignes de champ magnétique colorées par la composante axiale  $H_z$ .

### 2.2. Dynamo cinématique

Le code SFEMaNS a été comparé numériquement avec un code volumes finis/éléments de frontière sur des problèmes de dynamo cinématique avec des champs de vitesse analytiques axisymétriques (cf. [6]). Son avantage sur l'autre code est qu'il peut intégrer aussi les équations non linéaires (où  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{h}$  interagissent) et, donc dans le futur, il pourra être utilisé pour simuler l'expérience VKS, modulo une modélisation du volume ferromagnétique effectif des pales (qui brisent la symétrie cylindrique). Le schéma du dispositif est visible sur la figure 3(a). Un schéma simplifié du domaine modélisé (dans le plan méridien) est visible sur la figure 3(b). Deux disques sont en contra-rotation dans une cuve cylindrique remplie de sodium liquide. Cette cuve est entourée de sodium immobile, le tout étant contenu dans un réservoir en cuivre. Les pales sur les disques ne sont pas prises en compte dans les calculs. Les détails de l'expérience peuvent être trouvés dans [3].

On s'intéresse ici à l'effet de la forme de l'écoulement derrière les disques sur le nombre de Reynolds magnétique critique (qui correspond à un taux de croissance nul pour le champ magnétique). On utilise des données expérimentales sur un écoulement d'eau (documenté dans [7]) pour la forme de l'écoulement dans la zone située entre les disques. Les disques sont eux-mêmes modélisés par une partie fluide dont la vitesse est égale à la vitesse du fluide sur la face intérieure. Quatre cas ont été distingués, pour modéliser deux types différents de matériau pour les disques (fer doux ou acier), et deux types d'écoulement derrière les disques. On donne un exemple d'écoulement utilisé sur la figure 3(c). Lorsque les disques sont en acier, les deux types d'écoulement utilisés donnent des Reynolds magnétiques critiques différents (82 et 75). Avec des disques en fer doux, ce seuil est significativement abaissé, et indépendant de la forme de l'écoulement derrière les disques (66 et 64). En comparant acier et fer doux, on peut également observer une différence dans la forme des lignes de champ magnétique aux abords des disques (cf. figure 4). Ce résultat renforce l'idée que la présence de matériau solide ferromagnétique en mouvement est un facteur important de la dynamo observée dans l'expérience VKS. Non seulement les disques ferromagnétiques écrantent l'effet de

l'écoulement dans la zone derrière eux, mais ils abaissent également le nombre de Reynolds magnétique critique.

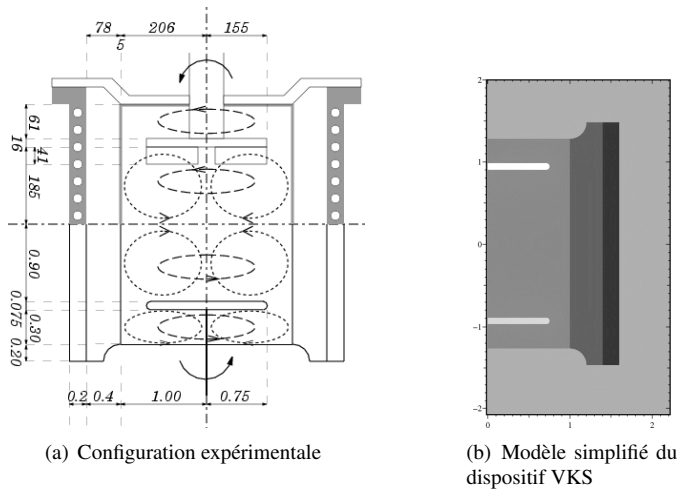


Fig. 3. Expérience de von Kármán Sodium (VKS) : (a) configuration expérimentale et structure du champ de vitesse moyen : en haut, les dimensions réelles de l'expérience (remerciement à l'équipe VKS) ; en bas, la modélisation simplifiée utilisée ; (b) modèle simplifié du dispositif VKS ; (c) champ de vitesse axisymétrique interpolé et imposé dans les calculs (représenté par ses composantes  $U_r$ ,  $U_\theta$ ,  $U_z$ ).

### 3. CONCLUSION

Par la suite, nous allons étudier numériquement les régimes non linéaires dans une configuration de type VKS : les pales qui existent dans le dispositif réel seront modélisées par un forçage volumique ou par une variation azimutale de la perméabilité magnétique. De plus, nous allons déterminer la variation du seuil de dynamo  $Rm^c$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  dans le cylindre en rotation-précession afin d'obtenir des prédictions pour l'expérience DRESDYN [2] en cours de montage.

### 4. REMERCIEMENTS

Ces travaux ont bénéficié d'un accès aux moyens de calcul de l'IDRIS au travers de l'allocation de ressources 90254 attribuée par GENCI (Grand Equipement National de Calcul Intensif).

### 5. RÉFÉRENCES

[1] J.-L. Guermond, J. Léorat, F. Luddens, C. Nore, and A. Ribeiro. Effects of discontinuous magnetic permeability on magnetodynamic problems. *J. Comput. Phys.*, 230 :6299–6319, 2011.

[2] F. Stefani, S. Eckert, G. Gerbeth, A. Giesecke, Th. Gundrum, C. Steglich, T. Weier, and B. Wustmann. DRESDYN - a new facility for MHD experiments with liquid sodium. *Magnetohydrodynamics*, 48 :103–113, 2012.

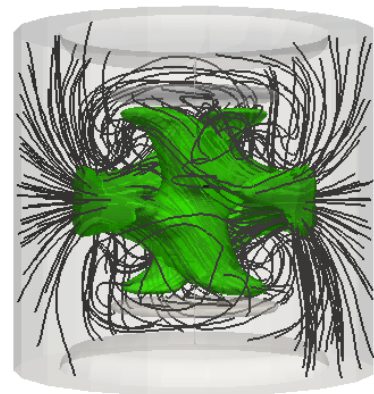
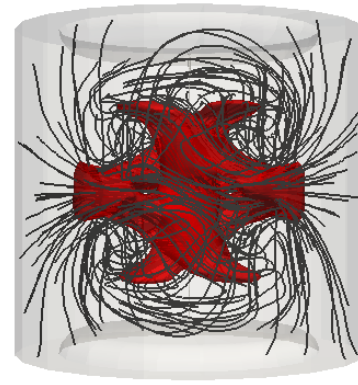


Fig. 4. Lignes de champ magnétique et iso-valeurs de l'énergie magnétique (25% de l'énergie magnétique maximale) pour des types de disques différents, avec le même champ de vitesse

[3] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, Ph. Odier, M. Moulin, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet. Generation of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :044502, 2007.

[4] A. Tilgner. Precession driven dynamos. *Phys. Fluids*, 17(3) :034104, 2005.

[5] C. Nore, J. Léorat, J.-L. Guermond, and F. Luddens. Nonlinear dynamo action in a precessing cylindrical container. *Phys. Rev. E*, 84 :016317, Jul 2011.

[6] A. Giesecke, C. Nore, F. Luddens, F. Stefani, G. Gerbeth, J. Léorat, and Guermond J. L. Electromagnetic induction in non-uniform domains. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 104(5-6) :505 – 529, 2010.

[7] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and J. Léorat. Towards an experimental von Kármán dynamo : numerical studies for an optimized design. *Phys. Fluids*, 17 :117104, 2005.